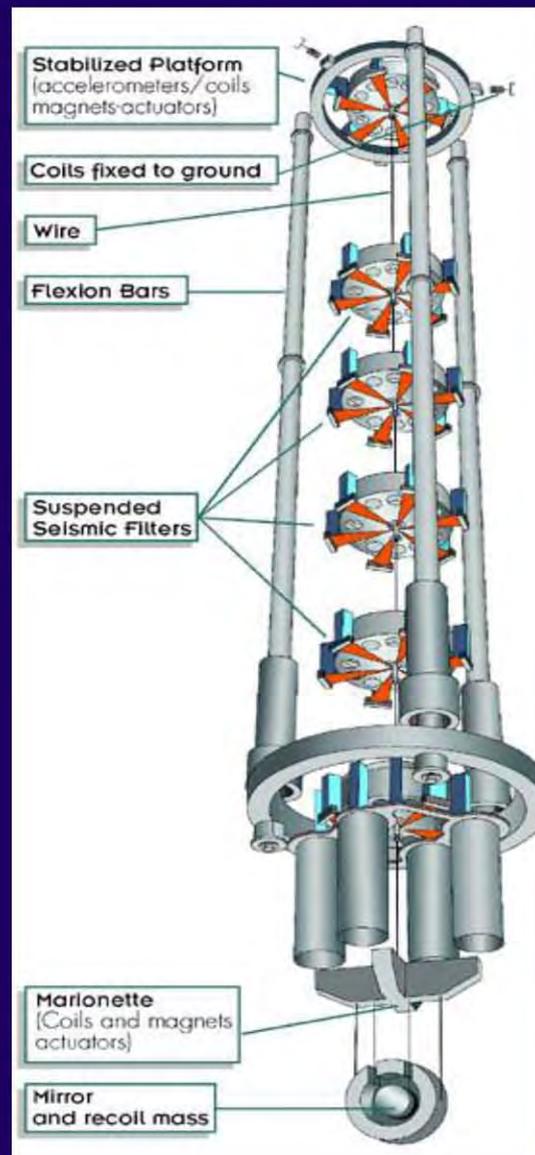


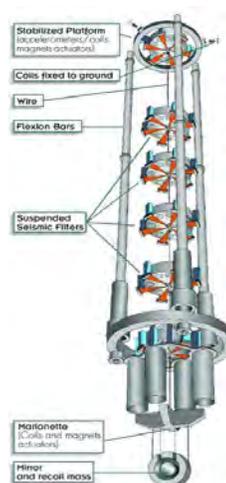
Sergio Frasca

Laboratorio di Meccanica



Versione 1 - 19 febbraio 2015

[Dal sito dell'esperimento Virgo - <http://www.ego-gw.it/virgodescription/italiano/indice.html>]



Le vibrazioni sismiche del terreno sono miliardi di volte più grandi delle variazioni di distanza indotte dalle onde gravitazionali. Di conseguenza è essenziale evitare movimenti spuri dei componenti ottici. L'isolamento sismico viene realizzato attraverso una catena di filtri sismici equipaggiati di molle a balestra triangolari. Le molle provvedono all'isolamento nella direzione verticale mentre il pendolo composto assicura l'isolamento nella direzione orizzontale.

Per ridurre ulteriormente il disturbo di origine sismica questa catena è sospesa a una piattaforma stabilizzata attivamente in grado di correggere moti di grande ampiezza a bassa frequenza. Questa piattaforma assicura il controllo della posizione al micron.

Un secondo controllo della posizione viene svolto all'estremità della catena di sospensione da una marionetta alla quale sono sospesi con fili molto sottili lo specchio e una massa di rinculo. Il controllo ultimo della posizione dello specchio è ottenuto attraverso forze piccolissime tra lo specchio e la massa di rinculo generate da bobine e magneti oppure da attuatori elettrostatici. In definitiva l'ambiente dell'interferometro VIRGO è molto più quieto di quanto lo sia quello di un velivolo spaziale in orbita intorno alla Terra.

Per suggerimenti e segnalazione di errori su queste dispense, <mailto:sergio.frasca@roma1.infn.it>

Sommario

QUESTO CORSO.....	9
PARTE PRIMA – INTRODUZIONE ALLA MISURA	11
1 – INTRODUZIONE: LA MISURA, BASE DELLE SCIENZE SPERIMENTALI	11
2 - SISTEMI DI UNITÀ DI MISURA E DIMENSIONI FISICHE	15
<i>Il sistema internazionale</i>	15
<i>Dimensioni fisiche e analisi dimensionale</i>	19
3 - STRUMENTI DI MISURA	21
<i>Strumenti digitali e conversione analogico-digitale</i>	22
4 - ERRORI DI MISURA.....	24
<i>Errore di lettura</i>	25
<i>Errore casuale</i>	26
<i>Errore sistematico</i>	27
L'errore di taratura	27
<i>L'incertezza</i>	31
<i>Precisione ed accuratezza</i>	32
<i>Incertezza relativa</i>	34
<i>Un esempio</i>	34
5 - RAPPRESENTAZIONE DI INSIEMI DI MISURE	37
<i>L'istogramma</i>	37
<i>Parametri di posizione e di dispersione: la media e la deviazione standard</i>	39
Metodo Ricorsivo.....	40
Media e deviazione standard da Istogramma.....	41
<i>Trasformazioni lineari per media e deviazione standard campionarie</i>	42
6 - INCERTEZZA SULLE MISURE INDIRETTE	43
<i>Misure indirette da una singola variabile</i>	43
<i>Misure indirette da più variabili</i>	46
7 - GRAFICI.....	50
<i>Incertezze nei grafici</i>	50
<i>Grafici semi-logaritmici</i>	51
<i>Grafici doppio-logaritmici</i>	53
8 – SISTEMI DI ACQUISIZIONE E ANALISI DATI.....	54
<i>Campionamento uniforme e operazioni su dati campionati</i>	55
<i>Introduzione ai fit</i>	59
PARTE SECONDA - PROBABILITÀ E STATISTICA	60
9 - TEORIA DELLE PROBABILITÀ	60
<i>Teoria assiomatica delle probabilità</i>	62
<i>Probabilità condizionata</i>	64
<i>La statistica</i>	65
10 - COMBINATORIA	68
11 - VARIABILI CASUALI DISCRETE.....	73
12 - DISTRIBUZIONI DISCRETE	77
<i>Distribuzione uniforme discreta</i>	77
<i>Distribuzione di Bernoulli</i>	78
<i>Distribuzione binomiale</i>	79
Prove alla Bernoulli: i run	82
<i>Distribuzione di Poisson</i>	84
Tempi d'attesa tra due eventi di un processo di Poisson	87
13 - VARIABILI CASUALI CONTINUE.....	88
<i>Trasformazioni lineari per valor medio e deviazione standard</i>	90
<i>Distribuzione cumulativa di una variabile casuale</i>	91
<i>Valor medio, mediana e moda</i>	91
<i>Momenti superiori: asimmetria e curtosi</i>	92
<i>Disuguaglianza di Chebyshev</i>	92

	<i>Somma di variabili casuali indipendenti</i>	93
14	DISTRIBUZIONI CONTINUE	95
	<i>Distribuzione uniforme (continua)</i>	95
	<i>Distribuzione di Gauss</i>	97
	Aprossimazione gaussiana.....	101
	Teorema del limite centrale	102
	<i>Distribuzione del χ^2</i>	105
	<i>Distribuzione di Cauchy</i>	106
15	VARIABILI CASUALI MULTIPLE (CENNO).....	108
	<i>Valori aspettati</i>	108
	<i>Densità marginali e indipendenza stocastica</i>	109
	<i>Covarianza</i>	110
	<i>Coefficiente di correlazione</i>	113
	<i>Distribuzione gaussiana bivariata</i>	115
	<i>"Scatter plot"</i>	116
16	STIMA DI PARAMETRI	118
	<i>Cenno all'inferenza statistica</i>	118
	<i>Stima del valor medio</i>	120
	<i>Statistica per piccoli campioni – La distribuzione t di Student</i>	121
	<i>Stima della varianza</i>	123
	<i>Stima del coefficiente di correlazione</i>	125
	<i>Principio dei minimi quadrati e la stima dei parametri di una retta sperimentale</i>	126
	<i>Fit lineare generale – fit polinomiale</i>	130
	<i>Incertezza sul fit</i>	132
	<i>Fit polinomiale e sviluppo in serie</i>	133
	<i>Il principio della massima verosimiglianza e la media pesata</i>	134
	<i>Stima del p di una successione di prove alla Bernoulli</i>	137
17	TEST STATISTICI.....	138
	<i>Test di consistenza con un valore teorico</i>	140
	<i>Test di consistenza tra due valori sperimentali</i>	140
	<i>Test del χ^2</i>	141
18	CONCLUSIONI: APPLICAZIONI DEL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ ALLA MISURA	143
PARTE TERZA – MISURE MECCANICHE		146
19	MISURE DI INTERVALLI DI TEMPO.....	146
	<i>Introduzione</i>	146
	<i>Unità di misura</i>	147
	<i>Ordini di grandezza dei tempi</i>	148
	<i>Orologi</i>	149
	<i>Tempo Universale e Tempo Atomico</i>	150
	<i>Il tempo siderale</i>	151
	<i>Effetti relativistici</i>	151
	<i>Misure di frequenza</i>	152
20	MISURE DI LUNGHEZZE.....	154
	<i>Introduzione</i>	154
	<i>Unità di misura</i>	154
	<i>Ordini di grandezza delle lunghezze</i>	156
	<i>Alcuni strumenti di misura di lunghezze</i>	157
	Calibro a cursore	157
	Micrometro Palmer.....	159
	Misure con ultrasuoni o con laser	160
	Metodo della triangolazione e misure di angoli	161
	<i>Misura della velocità</i>	163
	Misure basate sull'effetto Doppler	164
	Tachimetri	165
	Misura dell'accelerazione.....	165
	<i>Il GPS</i>	166
21	MISURA DI MASSE	169

<i>Introduzione</i>	169
<i>Unità di misura</i>	170
<i>Ordini di grandezza della massa</i>	171
<i>Le bilance</i>	172
La bilancia “classica” di precisione.....	172
La bilancia analitica digitale.....	177
<i>Misura della densità</i>	179
22 - MISURA DI FORZE	183
<i>Introduzione</i>	183
<i>La molla e il dinamometro</i>	184
<i>L'oscillatore armonico</i>	185
<i>La bilancia di torsione</i>	187
<i>Il sismometro</i>	189
23 - LA MISURA DELL'ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ	190
<i>Misura di g con un pendolo</i>	193
<i>Il gravimetro</i>	197
PARTE QUARTA – COMPLEMENTI DI FISICA GENERALE	202
24 - FLUIDI REALI	202
<i>Viscosità</i>	202
<i>Legge di Poiseuille</i>	204
<i>Moto vorticoso e Numero di Reynolds</i>	205
<i>Resistenza fluidodinamica</i>	207
PARTE QUINTA - ESERCITAZIONI DI LABORATORIO	210
MISURA DI DENSITÀ.....	210
ESERCITAZIONI STATISTICHE.....	214
<i>Il Pallinometro</i>	214
<i>Il contatore</i>	216
LA MOLLA.....	217
IL PIANO INCLINATO – I.....	221
<i>I esperimento - piano inclinato:</i>	221
<i>II esperimento : carrello tirato dal pesetto</i>	224
IL PIANO INCLINATO – II.....	229
<i>Moto oscillatorio</i>	229
<i>Moto piano non forzato (analisi dell'attrito)</i>	234
IL PENDOLO REVERSIBILE.....	237
IL PENDOLO FISICO.....	238
<i>Relazione ampiezza/periodo</i>	240
<i>Calcolo del centro di massa e del momento di inerzia del pendolo</i>	241
Misura di I_x	243
Verifica del periodo.....	243
<i>Misura di g</i>	245
Errori sistematici.....	246
<i>Smorzamento</i>	246
IL VOLANO.....	248
<i>Moto del volano</i>	248
<i>Procedura sperimentale</i>	252
FLUIDI.....	255
ACQUISIZIONE DATI E SOFTWARE	260
IL SISTEMA DI ACQUISIZIONE DATI DELLA PASCO.....	260
<i>Il sensore di moto rettilineo</i>	260
<i>L'interfaccia</i>	261
<i>Il software di acquisizione DataStudio</i>	261
PROGRAMMAZIONE IN MATLAB.....	264
<i>Introduzione a Matlab</i>	264
<i>Alcuni programmi in Matlab</i>	266

Per leggere i dati del DataStudio	266
Fit lineare generale	267
Selezione di segmenti di dati	269
Fit polinomiale per sottoperiodi.....	270
Smoothing dei dati.....	272
<i>Programma “standalone” di simulazione e analisi LabMec</i>	273
PROGRAMMAZIONE IN SCILAB	281
TEST ED ESERCIZI.....	282
<i>Test su dimensioni e istogrammi.....</i>	<i>282</i>
Altri esercizi	282
<i>Test su incertezze e cifre significative</i>	<i>284</i>
Altri esercizi	285
<i>Test sulla propagazione delle incertezze</i>	<i>286</i>
Altri esercizi	287
<i>Test elementare sulle probabilità</i>	<i>288</i>
Altri esercizi	289
<i>Esercizi sulle variabili casuali discrete</i>	<i>290</i>
<i>Test sulla binomiale.....</i>	<i>291</i>
Altri esercizi	292
<i>Test sulla Poissoniana.....</i>	<i>293</i>
Altri esempi	294
<i>Test sulla distribuzione normale.....</i>	<i>295</i>
Altri esercizi	296
<i>Esercizi vari.....</i>	<i>297</i>
<i>Dati distribuiti secondo Cauchy</i>	<i>299</i>
APPENDICE - APPROFONDIMENTI E CENNI AD ALTRI ARGOMENTI.....	302
UNITÀ DI MISURA AMERICANE E BRITANNICHE	302
LA SCALA LOGARITMICA.....	306
IL TEOREMA DI BAYES	307
VARIANZA DELLA BINOMIALE.....	308
LA STIMA BAYESIANA	309
I TEST NON PARAMETRICI	310
IL METODO DI MONTECARLO	312
VALUTAZIONE DELL'INCERTEZZA COL METODO DI MONTECARLO	313
MONTECARLO PER LA VALUTAZIONE DELL'INCERTEZZA IN MODO SEMPLIFICATO.....	317
EFFETTO DITHER (“TREMARELLA”).....	319
SUGGERIMENTI PER LA STESURA DELLE RELAZIONI	320
IL GRAVIMETRO ASSOLUTO IMGC-02.....	321
L'OFFICINA MECCANICA	324
UNA LEGGENDA URBANA	327
QUALCHE SITO DI INTERESSE PER IL CORSO.....	330
ALFABETO GRECO.....	331
TABELLE FISICHE E STATISTICHE.....	332
COSTANTI FISICHE.....	332
TABELLE DEI MATERIALI.....	333
VALORI DI G PER LE PROVINCE ITALIANE (GAZZETTA UFFICIALE)	335
DISTRIBUZIONE CUMULATIVA NORMALE STANDARDIZZATA.....	336
VALORI DEL χ^2 PER UN DATO LIVELLO DI FIDUCIA.....	337
TABELLA SEMI-INTERVALLI PER IL T DI STUDENT	338
INDICE.....	339

Questo corso

Il corso di Laboratorio di Meccanica, di cui queste sono le dispense, viene svolto al primo anno del corso di laurea in Fisica dell'università Sapienza di Roma. Esso è il primo corso sperimentale del corso di laurea ed ha il duplice scopo di fornire il bagaglio di conoscenze statistiche e probabilistiche per il trattamento delle misure sperimentali e dare le nozioni di base per la misura di grandezze meccaniche.

Il corso è composto di tre parti:

- Introduzione alla misura, in cui si introducono i sistemi di unità, gli strumenti di misura, gli errori e le incertezze di misura e le rappresentazioni di misure.
- Esposizione di argomenti di teoria delle probabilità e statistica essenzialmente finalizzati all'analisi di misure sperimentali
- Tecniche e strumenti di misura per le più importanti grandezze meccaniche.

Il testo è completato da alcune esercitazioni di laboratorio e da complementi di Fisica generale utili per alcune delle esperienze.

Sono presenti un capitolo sul sistema di acquisizione dati usato in laboratorio e su dei software di ausilio didattico e una raccolta di esercizi.

In appendice, infine, sono riportati approfondimenti su alcuni argomenti e tabelle fisiche e statistiche.

Per ovvi motivi didattici di comprensione pratica e di integrazione con le esperienze di laboratorio, l'esposizione delle tre parti nel corso non è sequenziale, ma si mescolano argomenti statistici e fisici.

Parte prima – Introduzione alla misura

1 – Introduzione: la misura, base delle scienze sperimentali

- La misura, base delle scienze sperimentali, di fondamentale importanza nella tecnica
- Che cosa è una misura
- Modelli e parametri
- Misure dirette e indirette

Si può far risalire a **Roger Bacon**, nel XIII secolo, l'idea dello sviluppo della scienza, in particolare la Fisica, come interazione tra “esperimento” e “matematica”. Tale idea fiorì, dopo più di tre secoli, grazie soprattutto a **Galileo Galilei** (1564-1642), **Christiaan Huygens** (1629-1695) e **Isaac Newton** (1642-1727). Da allora la scienza “naturale” si è sviluppata nel continuo confronto tra **esperimenti** e **teoria**, cioè tra “fare misure” ed “interpretare misure”.

Il processo si sviluppa nei seguenti due modi generali:

I modo :

- dall'esperienza o da altre osservazioni si identifica una particolare fenomenologia (per esempio la caduta dei gravi su un piano inclinato)
- si cerca di fare un esperimento che semplifichi il fenomeno (per esempio riducendo gli attriti) e si fanno misure accurate
- si cerca di fare una teoria che interpreti le misure, riesca a prevedere il risultato di misure fatte in condizioni differenti ed eventualmente suggerisca la presenza di nuovi fenomeni non ancora osservati

II modo :

- una teoria suggerisce l'esistenza di un certo fenomeno (per esempio la teoria della Relatività Generale prevede l'esistenza delle onde gravitazionali)
- si fa un esperimento per verificare la presenza del fenomeno, nelle modalità previste dalla teoria (si costruiscono rivelatori di onde gravitazionali)
- se si ritrovano i risultati previsti, è un grande successo della teoria, altrimenti la teoria è, almeno parzialmente, confutata e quindi va sostituita o corretta¹.

Questo paradigma, in cui la misura ha un ruolo centrale, non si applica solo alla Fisica, ma a tutte le scienze sperimentali.

Ma la misura non è solo importante nel processo di sviluppo della scienza. L'esecuzione di misure è infatti un'attività centrale nella tecnica e nella vita pratica.

¹ L'idea dell'esperimento “cruciale” in grado di decidere su una o più teorie si può far risalire a Francis Bacon (1561-1626), che la espone nel *Novum Organum (instantia crucis)*, visto come bivio nello sviluppo della scienza) e fu recepito da Newton (*experimentum crucis* nella sua teoria della luce). In tempi recenti Karl Popper (1902-1994) ha sviluppato il concetto di *falsificabilità*, tramite esperimenti cruciali, delle teorie scientifiche.

Una misura è un numero che viene associato ad una quantità fisica², come la lunghezza, il volume o la massa di un corpo. Un caso particolare di misura è il conteggio, per esempio di un certo numero di oggetti. Col termine “misura” si intende sia la procedura sperimentale usata, sia il risultato: non c’è tuttavia in genere equivoco, dato il contesto in cui il termine è usato.

Ad ogni misura è associata un'**incertezza**, cioè, a parte casi molto particolari³, ogni misura ha una precisione limitata⁴.

Molto spesso la quantità fisica a cui si vuole assegnare una misura è il parametro di un **modello**, non di un oggetto.

Esempio: la lunghezza di un tavolo. In questo caso per parlare di “lunghezza” dobbiamo supporre che il piano del tavolo sia un rettangolo, il che è un’ approssimazione; in questo caso il rettangolo è un modello (con due parametri indipendenti che sono per esempio le lunghezze dei due lati). Una migliore approssimazione potrebbe essere un quadrilatero irregolare, che è un modello più complesso, avendo più parametri indipendenti (per esempio le lunghezze dei quattro lati ed un angolo); spingendo ulteriormente l’ approssimazione si dovrebbero avere modelli “bitorzoluti” via via più complessi, con un numero crescente di parametri. Se il modello diventa troppo complesso, anche se migliora l’ approssimazione con la realtà, diventa praticamente inutile.

Altro esempio: la temperatura di una stanza. In questo caso il modello più semplice è che la temperatura sia la stessa ovunque (modello ad un solo parametro). Migliorando l’ approssimazione, si può supporre che la temperatura vari in modo continuo lineare dal pavimento al soffitto (l’ aria calda, per la minore densità, tende ad andare verso l’ alto) e quindi i parametri del nuovo modello sono due (la temperatura vicino al pavimento e quella vicino al soffitto). Ovviamente possono farsi modelli ben più complessi che tengano conto della presenza di fonti di calore, come per esempio le finestre o le persone. Anche in questo caso un modello troppo complesso (con troppi parametri) può risultare inutile.

Un modello è una semplificazione della realtà. Le leggi della Fisica spesso sono espresse in forma semplificata, per idealizzazioni, cioè modelli. Per esempio un "modello" è il "punto materiale", il "gas perfetto", eccetera.

L’ approssimazione necessaria per un modello dipende dalle situazioni. In genere si cerca il modello più semplice per le proprie necessità.

Lo stesso può dirsi per la costruzione di una teoria: più è “semplice” (cioè, meno parametri ha), più la riteniamo “bella” e la preferiamo. È questa una prassi generalizzata in tutta la scienza, sostenuta per la prima volta dal filosofo inglese del trecento **Guglielmo di Occam** (francescano come Roger Bacon) con la sua affermazione *Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem* (Non moltiplicare gli enti se non è necessario) che viene ricordata come il principio del **rasoio di Occam**. Nel nostro caso il termine latino “entia” può tradursi con “parametri”.

Le misure di quantità fisiche si dividono in **dirette** ed **indirette**.

² Anche se sono indirizzate prevalentemente alla Fisica, queste considerazioni si possono applicare anche alla misurazione di quantità non fisiche “misurabili” (per esempio, il “quoziente di intelligenza”).

³ In alcuni casi in cui la misura è un conteggio.

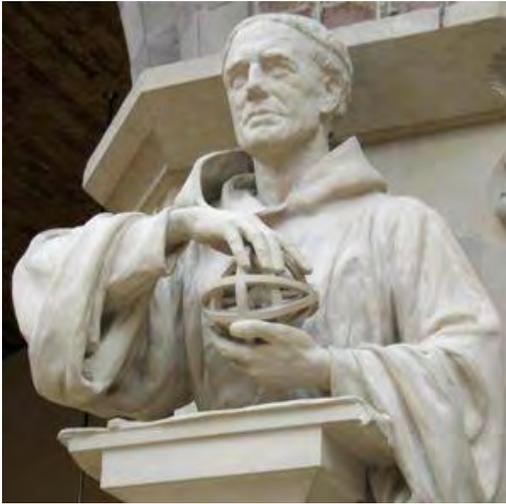
⁴ Poiché una teoria si basa su delle misure, nessuna teoria è “vera” se non entro una certa precisione e può quindi essere migliorata o confutata da misure più precise o dall’ osservazione di altri fenomeni (o la mancata osservazione di fenomeni da essa previsti). La “verità scientifica” andrebbe sempre messa tra virgolette ! Ciò che invece oggi è indubitabile è la potenza del metodo scientifico.

Una misura diretta è in genere effettuata con uno strumento di misura. Esempi di strumenti di misura sono il metro a nastro, la bilancia, il voltmetro, lo sfigmomanometro, il misuratore di pressione dei gommisti,... . Talora il compito di un fisico è costruire particolari strumenti di misura.

Una misura indiretta è una misura ottenuta da una o più misure dirette, tramite particolari equazioni. Esempi di misure indirette sono l'area di un quadrato, l'area di un rettangolo, il volume di una sfera, la velocità di una automobile (eseguita non col tachimetro, nel qual caso sarebbe una misura diretta, ma come rapporto tra una data distanza e il tempo impiegato a percorrerla), il numero di molecole in un certo volume di un gas (utilizzando un'opportuna formula basata, per esempio, su misure di volume, temperatura e pressione).

Per assegnare una misura ad una grandezza occorre definire l'**unità di misura**. Vedremo come questo problema sia stato affrontato dalla comunità scientifica.

Spesso ci si riferisce ad insiemi di misure riguardanti un esperimento come “**i dati sperimentali**”.



Roger Bacon (ha in mano una sfera armillare)



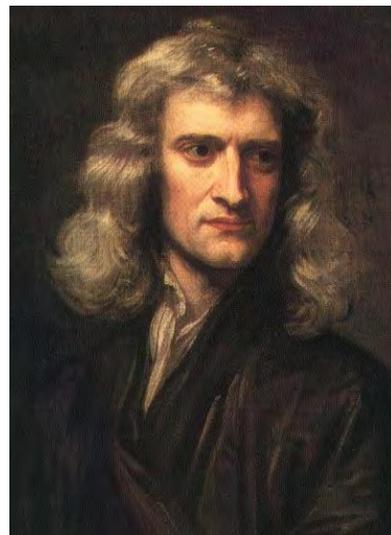
Guglielmo d'Occam



Galileo e Milton (Cesare Aureli, ~1880). Manca la sfera armillare in mano a Galileo.



Christiaan Huygens



Isaac Newton

2 - Sistemi di unità di misura e dimensioni fisiche

- Sistema Internazionale
- m, s, kg
- Multipli e sottomultipli
- Dimensioni fisiche, analisi dimensionali

Il sistema internazionale

Per misurare una grandezza fisica va prima definita l'unità di misura che si vuole usare. Il valore della misura è quindi il rapporto tra la grandezza fisica in oggetto e l'unità di misura.

In passato non solo ogni paese aveva le sue unità di misura, ma all'interno di ogni paese ogni corporazione di artigiani. Per esempio c'erano unità di peso differenti per differenti tipi di merci. Inoltre c'erano più unità di misura dello stesso tipo (per esempio per la lunghezza il pollice, la spanna, il piede, il cubito, lo stadio, il miglio, ...) non coordinate tra loro. Una situazione del genere ancora sussiste nei paesi anglosassoni (vedi negli Approfondimenti). Col nascere della scienza moderna ci si rese conto della necessità di razionalizzare la situazione, ma solo ai tempi della rivoluzione francese furono fatti decisivi passi avanti, con la definizione, da parte dell'Accademia delle Scienze di Parigi, del metro campione e del chilogrammo campione. Solo più tardi furono aggiunte altre unità di base e queste furono adottate ufficialmente da altri paesi.

La comunità scientifica ha promulgato negli ultimi 200 anni vari sistemi coerenti di unità di misura.

Citiamo il sistema **CGS** (basato sul centimetro, il grammo e il secondo), proposto nel 1874 dalla British Association for the Advancement of Science, sotto suggerimento del fisico **William Thomson**, noto anche come **Lord Kelvin** (1824-1907). Il CGS è ancora parzialmente usato. Nel 1901 l'italiano **Giovanni Giorgi** (1871-1950), fisico e ingegnere, propose il sistema **MKS** (basato sul metro, il chilogrammo e il secondo), da cui deriva il **Sistema Internazionale** (o **SI**), adottato nell'ottobre del 1960 dall'XI Conferenza Internazionale di Pesi e Misure, tenutasi a Parigi. Questo sistema è ufficialmente in vigore in Italia dal 1 gennaio 1979 (Decreto Legge n. 122 de 14/4/78, in attuazione di una direttiva CEE⁵).

Solo tre nazioni non hanno adottato a tutt'oggi il Sistema Internazionale: la Liberia, il Myanmar e gli Stati Uniti.

Le unità di base sono così definite:

- **metro (m)**: unità di lunghezza; definito come la lunghezza percorsa nel vuoto da un raggio di luce in $1/299\,792\,458$ di secondo. Inizialmente (1791) era definito come la 40-milionesima parte del meridiano terrestre; in seguito (1889) era stato costruito il metro campione, in una lega di platino-iridio, conservato nei sotterranei del *Bureau International de Poids et Mesures* a Sevres.

⁵ La Comunità Economica Europea, nata nel 1957, da cui nel 1992 è nata l'Unione Europea (UE).

- **chilogrammo (kg):** unità di massa; definito come la massa del prototipo internazionale di chilogrammo, di platino-iridio come il metro campione, conservato anch'esso presso il *Bureau International de Poids et Mesures* a Sevres (1889). Inizialmente era definito come la massa di un decimetro cubo di acqua distillata a pressione atmosferica, alla sua massima densità (a 3.9818 °C): con la “nuova” definizione, la massima densità dell’acqua è 0.99997358⁶.
- **secondo (s):** unità di tempo; definito come la durata di 9 192 631 770 periodi della radiazione prodotta dalla transizione tra due livelli iperfini dello stato fondamentale dell’atomo di cesio 133. Originariamente era definito come la 86400-esima parte del giorno solare medio.
- **kelvin (K):** unità di temperatura; è la frazione 1/273.16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell’acqua (da Lord Kelvin).
- **ampere (A):** unità di corrente elettrica (da André-Marie Ampère, 1775-1836).
- **mole (mol):** unità di quantità di sostanza, definita come la quantità di sostanza di un sistema che contiene un numero di entità elementari pari al numero di atomi presenti in 12 grammi di carbonio-12; tale numero è detto il **numero di Avogadro** (da Amedeo Avogadro, 1776-1856) ed è pari a circa $6.02214179 \times 10^{23}$.
- **candela (cd):** unità di intensità luminosa.



Campioni di chilogrammo e di metro (obsoleto)

A partire dalle unità di base si costruiscono le unità derivate. Per esempio:

- l’**hertz (Hz)**, unità di frequenza pari al numero di cicli al secondo (dimensione s^{-1}) (da Heinrich Hertz (1857-1894)
- il **newton (N)**, unità di forza, definito come la forza che applicata ad un corpo di massa un chilogrammo, produce un’accelerazione di 1 m/s^2 (dimensione $\text{kg}\cdot\text{m/s}^2$)

⁶ “**Measurement of Absolute Water Density, 1 °C to 40 °C**”, B Patterson *et al* 1994 *Metrologia* 31 277-288

- il **joule (J)**, unità di energia e lavoro, definito come il lavoro compiuto dalla forza di 1 N quando il suo punto di applicazione si sposta di 1 m (dimensione $\mathbf{kg \cdot m^2/s^2}$) (da James Prescott Joule, 1818-1889).
- il **pascal (Pa)**, unità di pressione, pari alla pressione esercitata dalla forza di 1 N sulla superficie di un metro quadrato (dimensione $\mathbf{kg/s^2m}$) (da Blaise Pascal, 1623-1662).

Importanti unità di misura per grandezze elettriche sono il **volt** (da Alessandro Volta, 1745-1827), unità di misura del potenziale elettrico (dimensione $\frac{\mathbf{kg \cdot m^2}}{\mathbf{s^3 \cdot A}}$) e l'**ohm** (da Georg Simon Ohm, 1789-1854), unità di misura della resistenza elettrica (dimensione $\frac{\mathbf{kg \cdot m^2}}{\mathbf{s^3 \cdot A^2}}$).

Per indicare multipli e sottomultipli delle unità di misura si usano, nel Sistema Internazionale, i seguenti prefissi o simboli:

Fattore	Prefisso	Simbolo
10^{24}	yotta	Y
10^{21}	zetta	Z
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo o chilo	k
10^2	etto	h
10^1	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n

10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	yocto	y

ATTENZIONE: le unità di misura e i prefissi vanno indicati correttamente, non confondendo maiuscole e minuscole. Si noti che:

- le unità che si riferiscono a nomi di persona (come ampere, kelvin, hertz, newton,...) sono scritte in minuscolo, ma le abbreviazioni hanno la prima lettera maiuscola.
- i prefissi superiori al k (10^3) sono tutti maiuscoli, gli altri minuscoli
- l'abbreviazione del secondo è s, non sec.

Nella pratica si usano anche unità di misura che non sono "SI". Sebbene ciò sia in genere da evitare, in certi casi è tollerabile. Per esempio la velocità di un'auto espressa in chilometri/ora (invece che in m/s); o in caso di alcune unità di tempo: talora si usa il minuto o l'anno o il secolo (che è circa 3 Gs). Per la temperatura solo i fisici usano il kelvin, mentre spesso si usa il grado centigrado (indicato con °C, dal nome dell'astronomo svedese Anders Celsius che lo propose nel 1742) o, negli Stati Uniti, il grado Fahrenheit⁷ (indicato con °F), dal nome del fisico tedesco che lo introdusse nel 1724.

In informatica, in particolare nella misura della quantità di memoria in cui l'unità di misura è il byte (indicato con B, quasi sempre indicante un insieme di 8 bit), in pratica spesso si fa un uso errato dei multipli definiti nel SI: in particolare si indica con kB $2^{10}=1024$ byte, con MB $2^{20}=1048576$ e così via. In realtà esistono dei corretti multipli "binari", indicati con ki, Mi, Gi e così via e, nel caso, vanno usati questi.

Quantità	Fattore	Nome corretto	Sigla	Altri nomi in uso	Sigla	Errore
1	2^0	byte	B	byte	B	0
1024 B	2^{10}	kibibyte	kiB	kilobyte	kB	+2,4%
1024 kiB	2^{20}	mebibyte	MiB	megabyte	MB	+4,9%
1024 MiB	2^{30}	gibibyte	GiB	gigabyte	GB	+7,4%
1024 GiB	2^{40}	tebibyte	TiB	terabyte	TB	+10,0%
1024 TiB	2^{50}	pebibyte	PiB	petabyte	PB	+12,6%
1024 PiB	2^{60}	exbibyte	EiB	exabyte	EB	+15,3%

⁷ La definizione della scala Fahrenheit è piuttosto bizzarra: lo zero corrisponde a quella che era la temperatura più bassa allora ottenibile in laboratorio (tramite una opportuna miscela di ghiaccio e sale) e il valore 96 era assegnato alla temperatura del sangue di cavallo. La definizione attuale fissa il 32 alla temperatura del ghiaccio fondente (0 °C) e 212 a quella di ebollizione dell'acqua (100 °C), in condizioni atmosferiche standard..

Dimensioni fisiche e analisi dimensionale

Le equazioni della Fisica sono relazioni tra grandezze fisiche (e non semplicemente tra quantità numeriche, come in genere in algebra) e una grandezza fisica è definita non solo da un numero, che indica la misura, ma anche da una **dimensione fisica** (per esempio un tempo, una lunghezza, una velocità). Ovviamente i due termini di un'equazione (a destra e a sinistra del segno di eguale) devono avere sia lo stesso valore numerico, sia la stessa dimensione. Così se in un'espressione compare la somma algebrica di più quantità, esse devono avere la stessa dimensione fisica (si dice anche semplicemente "le stesse dimensioni"): non si possono per esempio sommare una forza e una velocità. Questo fatto è spesso utilizzato per controllare la correttezza delle equazioni (è una specie di semplice "prova del nove": se si trovano discrepanze, l'equazione è sicuramente sbagliata, se non si trovano, può essere corretta).

I prodotti e i rapporti possono invece essere fatti tra elementi di differenti dimensioni (per esempio per avere una velocità si divide una lunghezza per un tempo).

Gli esponenti, se compaiono in una formula, hanno le dimensioni di un numero puro, cioè non hanno dimensioni, ovvero sono adimensionali. Anche gli angoli (in genere misurati in radianti) sono considerati adimensionali.

Ad ogni equazione fisica è quindi associata un'equazione dimensionale. Per esempio prendiamo la seconda legge della dinamica, nel caso di massa costante,

$$(2.1) \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

dove \vec{F} è il vettore velocità, \vec{a} il vettore accelerazione e m la massa, associamo l'equazione dimensionale

$$(2.2) \quad [F] = [m] \cdot [a] = [M] \cdot [L \cdot T^{-2}] = [M \cdot L \cdot T^{-2}]$$

Le parentesi quadre indicano che si tratta di un'equazione dimensionale; M è la dimensione "massa", L è la dimensione "lunghezza" e T la dimensione "tempo"; si noti che, se ci si limita alla meccanica, le dimensioni alla fine vengono espresse in termini di un prodotto tra le dimensioni L, M e T elevate ad opportuni esponenti:

$$[L^a \cdot M^b \cdot T^c]$$

Per esempio la velocità ha dimensioni

$$(2.3) \quad [v] = [L^1 \cdot M^0 \cdot T^{-1}] = [L \cdot T^{-1}]$$

Per l'energia (e il lavoro)

$$(2.4) \quad [E] = [L^2 \cdot M^1 \cdot T^{-2}] = [L^2 \cdot M \cdot T^{-2}]$$



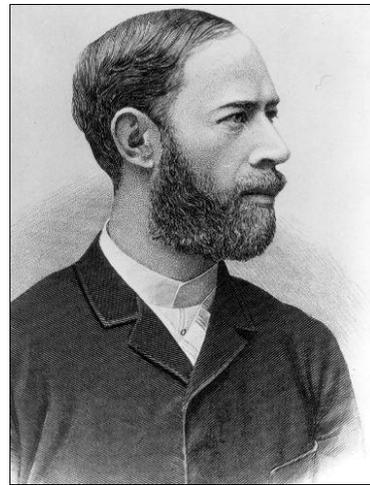
Alessandro Volta



André-Marie Ampere



Georg Simon Ohm



Heinrich Rudolph Hertz



Lord Kelvin (William Thompson)



Giovanni Giorgi

3 - Strumenti di misura

- Taratura
- Portata, sensibilità, prontezza
- Strumenti analogici e digitali
- Trasduttori

Una misura diretta può farsi tramite il confronto diretto con l'unità di misura o tramite un apposito sistema, più o meno complesso, chiamato strumento di misura tarato.

La **taratura** è la procedura, in genere attuata dal fabbricante, tramite la quale si rende lo strumento in grado di dare misure corrette; esempio: le “tacche” sul righello o su un termometro. Per taluni strumenti questa operazione va ripetuta ogni tanto, mandando lo strumento in laboratori specializzati, o tramite opportune procedure da parte dell'utente o, in caso di alcuni strumenti digitali, tramite una procedura automatica attuata dallo stesso strumento (esempio: talune bilance).

Uno strumento di misura è caratterizzato da alcuni parametri. In particolare:

- La **portata**, cioè l'intervallo dei valori misurabili, per esempio il tachimetro di un'auto può avere una portata di 200 km/ora, un voltmetro da -20 V a +20 V
- La **sensibilità**, espressa come errore di sensibilità o errore di lettura, corrispondente alla minima variazione della grandezza apprezzabile in modo oggettivo
- La **prontezza**, cioè il tempo occorrente per ottenere il valore della misura (eventualmente con una data approssimazione)
- La **precisione** e l'**accuratezza**, di cui parleremo in seguito.

Spesso gli strumenti di misura, in particolare quelli digitali, si basano sull'uso di **trasduttori** (o sensori), dispositivi che trasformano una grandezza fisica in un'altra, in genere di tipo elettrico, in modo da poterla elaborare elettronicamente; per esempio una pressione in una differenza di potenziale, una velocità in una corrente, una temperatura in una resistenza).

Nei recenti *smartphone* sono presenti vari sensori di grandezze fisiche. Tra questi, per esempio,

- accelerometro
- giroscopio
- magnetometro (bussola)
- fotocellula
- barometro

oltre ovviamente al microfono, la fotocamera, le antenne per il canale telefonico e per il GPS e lo schermo capacitivo per l'input “touch”.

Sono state realizzate svariate “app” per utilizzare questi sensori per fare misure fisiche.

Strumenti digitali e conversione analogico-digitale

Lo sviluppo (da alcuni decenni) dell'elettronica digitale⁸ ha permesso la realizzazione di nuovi strumenti di misura che si caratterizzano per la presenza di un display che indica in forma numerica il risultato della misura.

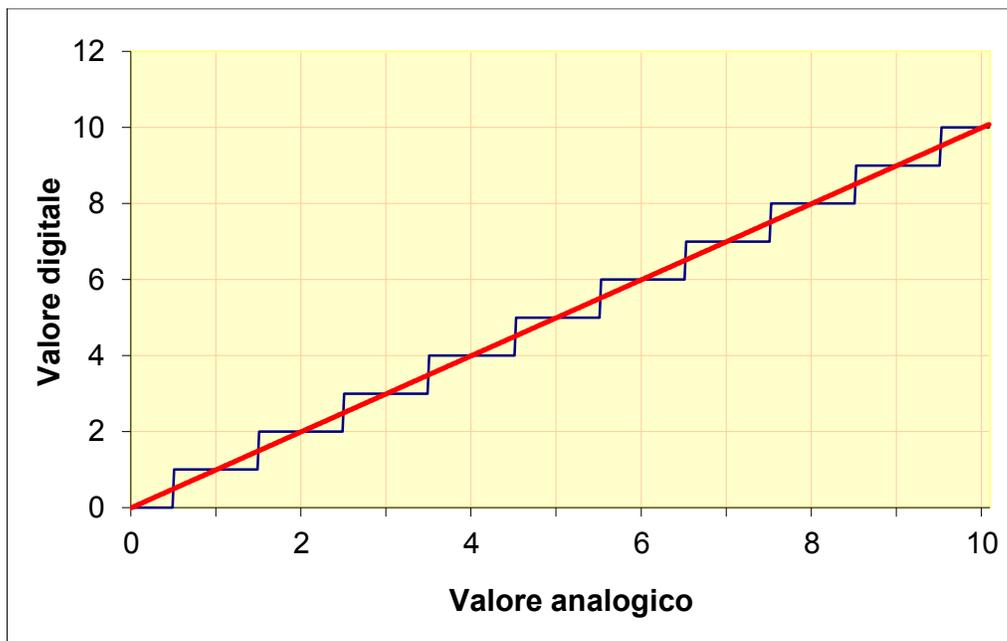
Tali sistemi offrono vari vantaggi, per esempio un più semplice modo di uso, un minor costo, spesso una maggiore precisione. Inoltre sono spesso presenti caratteristiche di grande utilità, come memorie, procedure di auto-taratura, sistemi di protezione contro un uso non corretto, eccetera.

Di base uno strumento di misura digitale è composto da

- un sensore, che trasforma la grandezza in misura in una grandezza elettrica, quasi sempre una tensione in un certo range di valori (la grandezza analogica)
- un convertitore analogico-digitale, che trasforma la grandezza analogica in una sequenza di bit, cioè una successione di valori di tensione rappresentanti i valori binari 1 e 0, che rappresenta un numero intero in base 2
- un circuito di elaborazione logica (in genere un microprocessore) che esegue varie procedure, tra cui essenziale la trasformazione del numero binario in un numero decimale rappresentante la misura in opportune unità
- un display (numerico o grafico) che mostra il risultato della misura

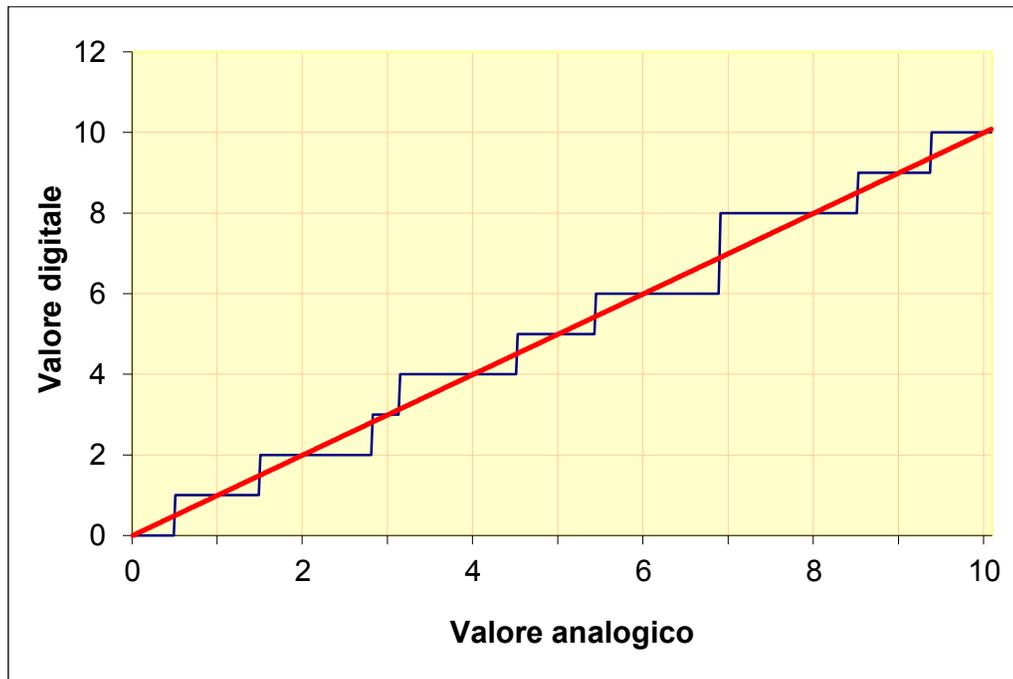
Il convertitore analogico digitale (in sigla ADC, analog to digital converter) trasforma una tensione elettrica variabile in un certo range in un numero intero binario compreso in genere tra 0 e $2^N - 1$, essendo N il numero di bit del convertitore (di solito da 8 a 16).

Nel caso ideale la conversione è di questo tipo:



⁸ Distinguiamo l'elettronica analogica, che studia circuiti come gli amplificatori, gli oscillatori, i modulatori, eccetera, dall'elettronica digitale, che studia circuiti che realizzano porte logiche, flip-flop, microprocessori, eccetera.

In pratica piccoli errori nel dispositivo ADC fanno sì che la situazione sia di questo tipo:



In situazioni peggiori, il legame tra il valore analogico e quello digitale potrebbe anche essere non monotono.

4 - Errori di misura

- Errore di lettura
- Errori sistematici
- Errori casuali
- Incertezza di una misura
- Rappresentazione di una misura e cifre significative
- Precisione ed accuratezza
- Incertezze assolute e relative

Quando misuriamo una grandezza fisica (o un parametro di un modello), noi supponiamo che essa abbia un “valore vero” g . Il risultato della nostra misura sarà un numero x in genere diverso da g . Poniamo

$$(4.1) \quad x = g + e$$

e definiamo e “errore di misura”. e è in genere composto dalla somma di tre termini

$$(4.2) \quad e = e_L + e_S + e_C$$

di natura molto diversa. Essi sono :

- e_L errore di lettura (o di sensibilità), che abbiamo già introdotto nel precedente capitolo
- e_S errore sistematico
- e_C errore casuale

Spesso uno o due di essi sono trascurabili rispetto ai rimanenti.

Errore di lettura

Abbiamo già introdotto l'**errore di sensibilità** (o **errore di lettura** o anche **errore di risoluzione**) a proposito dei parametri che descrivono uno strumento di misura. Consideriamo due casi:

- a) La misura effettuata con uno **strumento graduato**, per esempio la misura di una lunghezza eseguita con un righello, o la misura di una corrente elettrica fatta con un tester analogico. La misura può essere effettuata con una approssimazione dell'ordine dell'intervallo di graduazione della scala di taratura. Questa approssimazione può essere vista come un errore aggiuntivo (positivo o negativo), che appunto chiamiamo errore di lettura. Chiamiamo **intervallo di lettura** l'intervallo dei valori della grandezza in misura associato ad una data lettura: **l'errore di lettura è dato dalla metà dell'intervallo di lettura**. Spesso si identifica l'intervallo di lettura con l'intervallo di graduazione della scala, ma, per essere più corretti, va considerata l'accuratezza dell'operazione di taratura (talvolta riportata nelle specifiche dello strumento) e la difficoltà di stimare soggettivamente la misura (per esempio, per possibili errori di parallasse). Si può quindi avere un errore di lettura superiore alla metà dell'intervallo di graduazione, o anche inferiore ad esso (in pratica però raramente superiore ad un intervallo di graduazione o inferiore a un quarto di esso).
- b) La misura effettuata con uno **strumento digitale**. In tal caso l'intervallo di misura ha l'ampiezza di una unità nella cifra meno significativa. Il valore indicato dal display in genere indica il valore centrale dell'intervallo di misura (in qualche caso indica l'estremo inferiore).

Come vedremo più avanti, l'errore di sensibilità è in genere distribuito in modo uniforme nell'intervallo di lettura.

Errore casuale

Vediamo ora l'**errore casuale**. Se ripetiamo più volte una misura con uno strumento molto sensibile, spesso succede che otteniamo risultati leggermente differenti. Le cause di questo fenomeno sono molteplici. Per esempio

- cambiamenti delle condizioni sperimentali. Per esempio variazioni di temperatura, piccole differenze nella trazione di un metro a nastro,...
- inadeguatezza del modello. Per esempio nella misura del lato di un cubo, fatta in varie posizioni, se il corpo in esame non è un cubo “abbastanza perfetto” (per rugosità o imprecisione della lavorazione).
- particolari procedure sperimentali. Per esempio, si supponga di voler misurare con un righello da 20 cm la lunghezza di un tavolo di circa tre metri; ciò può essere fatto riportando più volte la lunghezza del righello lungo il bordo del tavolo: la giunzione tra i vari segmenti non sarà perfetta e quindi ripetendo la misura il risultato potrà essere differente.
- disturbi dovuti a cause esterne, per esempio vibrazioni, urti, disturbi elettrici,...
- piccoli errori dell'operatore umano, per esempio in una misura di intervallo di tempo con un cronometro manuale, piccole variazioni nei riflessi dello sperimentatore.
- intrinseca stocasticità del comportamento della materia, sia per ragioni termodinamiche (vedi la teoria cinetica della materia), sia per ragioni quantistiche (vedi il principio d'indeterminazione di Heisenberg).

L'errore casuale può non essere evidenziabile se è inferiore all'errore di lettura.

Se ripetiamo molte volte la misura di una grandezza in una situazione in cui è presente l'errore casuale, abbiamo risultati differenti. In assenza di errori sistematici, questi differenti valori sono sia maggiori che inferiori al valore vero. Questo fatto suggerisce che facendo la media di più misure affette da errore casuale, si ottiene un valore con un errore casuale inferiore.

Se facciamo un istogramma (vedremo come) di questi risultati, troviamo un caratteristico andamento “a campana”, centrato intorno al valor medio. Come vedremo più avanti, l'errore casuale è in genere distribuito in modo gaussiano.

Errore sistematico

Vediamo infine l'**errore sistematico**. Se ripetiamo la misura, esso è in genere sempre lo stesso, quindi fare la media di più misure non lo riduce. Le cause più comuni di errori sistematici sono le seguenti:

- errore di taratura dello strumento di misura. Per esempio un orologio che “va indietro” produce misure di intervalli di tempo più brevi del valore giusto; un righello con le tacche a distanze errate produce ovviamente misure errate. Ovviamente c'è sempre un limite all'accuratezza della taratura di uno strumento e questo viene in genere indicato dal costruttore. Quando non viene indicato altrimenti, in genere è inferiore all'errore di lettura. Per ridurre questo errore va controllata la taratura degli strumenti. Un'analisi dettagliata di questo errore è nel successivo sottoparagrafo.
- errore del modello. Per esempio misurare la massa di un corpo con una bilancia trascurando la spinta di Archimede, dovuta all'aria, produce misure inferiori al valor vero. Questo tipo di errore può talvolta ridursi o cancellarsi usando un modello più corretto.
- perturbazione della grandezza da misurare da parte dello strumento di misura. Per esempio, se vogliamo misurare la temperatura dell'acqua calda contenuta in un piccolo recipiente tramite un termometro che inizialmente è a temperatura ambiente, introducendo il termometro nell'acqua la raffreddiamo e quindi il risultato della misura è inferiore al valore corretto. Talvolta questo tipo di errore può calcolarsi e quindi sottrarsi dal valore della misura sottratto.

Abbiamo visto che talvolta l'errore sistematico si può calcolare e sottrarre dal risultato. Uno dei compiti più importanti di un fisico sperimentale è proprio la previsione e la riduzione degli errori sistematici.

L'errore di taratura

L'errore di taratura è un tipico errore sistematico di uno strumento di misura. In genere uno strumento sottoposto ad una sollecitazione s , risponderà⁹ con

$$r = f(s)$$

e l'errore di taratura è $e_T(s) = r - s = f(s) - s$. Nei casi più semplici, tale errore è esprimibile come

$$e_T = \alpha + \beta \cdot s$$

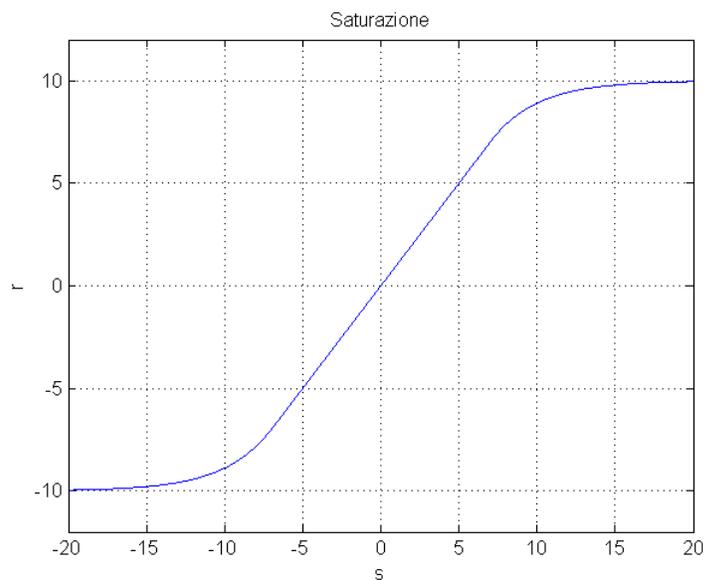
dove le due costanti α e β sono rispettivamente l'errore di 0 (il valore che lo strumento dà quando la sollecitazione è 0) e l'errore di scala (dovuto ad un errore sulla definizione dell'unità di misura usata per tarare lo strumento).

Più in generale si ha

⁹ In questa trattazione trascuriamo gli effetti dinamici e isteretici (cioè legati all'isteresi del sistema di misura).

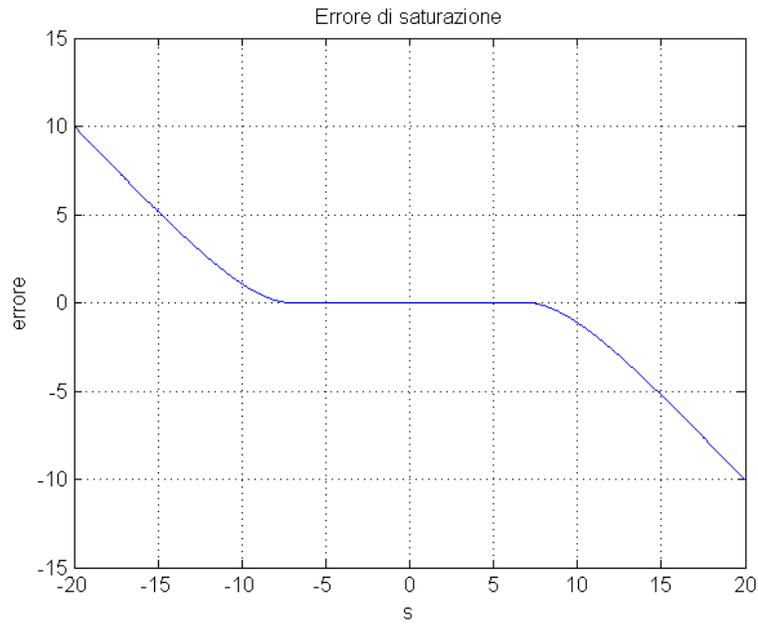
$$e_T = \alpha + \beta \cdot s + \gamma(s)$$

dove $\gamma(s)$ è l'errore di linearità¹⁰. Questo può essere piuttosto vario. Casi tipici sono errori nella conversione analogico-digitale e il fenomeno della saturazione. Quest'ultimo è legato al limitato range dello strumento, per cui, quando ci si avvicina agli estremi del range, lo strumento comincia a “saturare”, come è mostrato nella figura seguente:



e quindi l'errore dovuto alla saturazione è

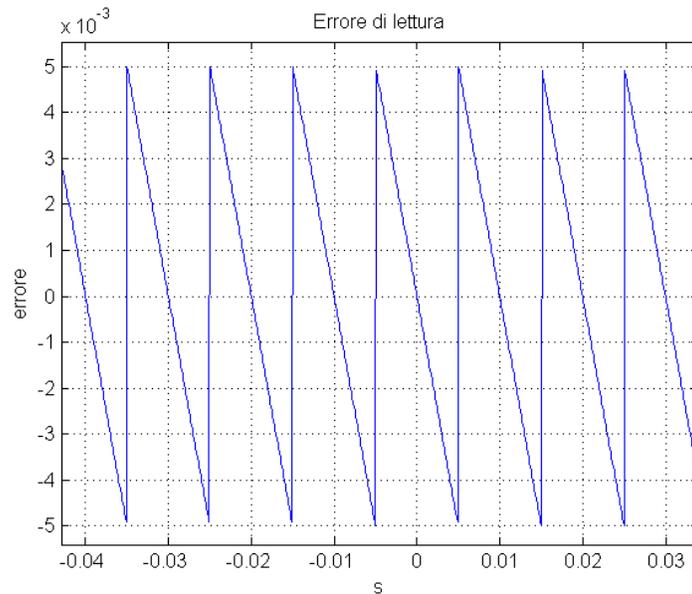
¹⁰ Per definirlo correttamente, bisogna aver prima stabilito bene quale sia il valore di α e β , altrimenti la definizione non è univoca.



Se è noto l'errore di taratura, lo si può spesso sottrarre, ed è questo ciò che fanno gli strumenti che fanno l'auto-calibrazione automatica.

Nel caso della saturazione ciò può farsi per un range molto limitato, e comunque peggiorando l'incertezza della misura.

L'errore di lettura di uno strumento digitale può essere visto come un errore di taratura. In figura è mostrato quest'errore per uno strumento che ha due cifre dopo la virgola (cioè il "quanto" di campionamento è 0.01 dell'unità di misura usata):



Ovviamente questo errore non è noto e quindi non si può sottrarre. C'è tuttavia una tecnica per ridurlo, ed è la tecnica del "dithering", basata sull'aggiunta di "rumore" noto.

In linea di principio, comunque, se possiamo aggiungere un valore noto variabile più piccolo del “quanto” di campionamento, possiamo vedere per quale valore “cambia” la cifra e quindi migliorare la misura. Si tenga però presente che normalmente il numero delle cifre mostrate dal display digitale di uno strumento tengono presente l’accuratezza e la precisione dello strumento, quindi questa procedura raramente è utile (lo potrebbe essere se ci interessano misure “relative”, per esempio di due grandezze che misuriamo quale è la maggiore: in questo caso può non interessarci il valore effettivo di ciascuna grandezza, ed anche uno strumento starato ci può servire).

L'incertezza

La presenza inevitabile degli errori di misura limita la qualità delle misure. Ad ogni misura è quindi associata una grandezza, detta **incertezza**, che ci dà informazione sull'intervallo di valori possibili (o plausibili) per il valore vero. La misura viene quindi espressa come

$$(4.3) \quad x \pm \Delta x$$

seguito dall'unità di misura, intendendo che il valore vero della misura sia compreso (plausibilmente) nell'intervallo $x - \Delta x$ e $x + \Delta x$. x è il **valore** della misura e Δx è l'**incertezza**. Talvolta (di rado) si indicano intervalli di misura "asimmetrici", come

$$(4.4) \quad x_{-\Delta x1}^{+\Delta x2}$$

L'incertezza non è in genere nota con alta precisione (in genere a circa il 10 %), e viene in genere espressa con una o due cifre significative.

Suggerimento per il numero di cifre significative dell'incertezza: usare due cifre significative se la prima cifra è bassa, per esempio minore di 4, altrimenti usarne una.

Perché? Consideriamo le seguenti misure, a due a due con valori successivi di incertezza:

$$10.0 \pm 0.1 \quad 10.0 \pm 0.2 \quad 10.0 \pm 0.8 \quad 10.0 \pm 0.9; \quad 10.00 \pm 0.14 \quad 10.00 \pm 0.15 \quad 10.00 \pm 0.89 \quad 10.00 \pm 0.90$$

Le prime quattro hanno incertezze espresse con una sola cifra significativa; tra la prima e la seconda il valore dell'incertezza raddoppia, tra la terza e la quarta la variazione è di circa il 12 %. Le seconde quattro hanno incertezze espresse con due cifre significative, tra la quinta e la sesta la variazione è di circa il 7 %, mentre tra le ultime due è circa l'1 %. Come si vede sulle prime due misure la precisione sull'incertezza è troppo scarsa, mentre per le ultime due è troppo elevata. Da qui il suggerimento.

Una volta stabilita l'incertezza, il valore della misura va espressa con un numero di cifre significative coerente con l'incertezza, per esempio 347.234 ± 0.023 , 271 ± 6 , 5270 ± 150 (**non** per es. 574.358 ± 2.1 o 75.3 ± 0.005 che vanno scritte 574.4 ± 2.1 e 75.300 ± 0.005). Ovviamente con la corretta unità di misura.

Un modo alternativo di rappresentare una misura con la relativa incertezza è scrivere la misura seguita dalle due cifre significative dell'incertezza tra parentesi tonde; per esempio la costante gravitazionale vale

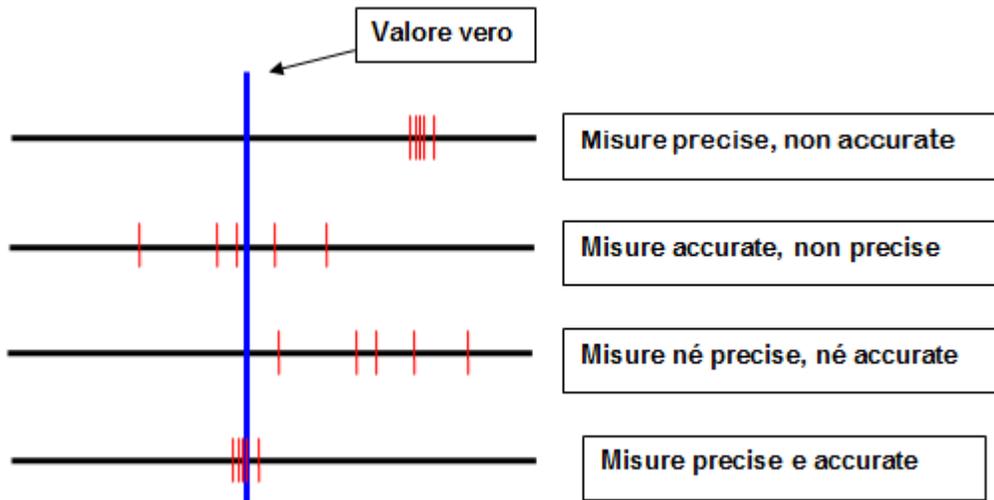
$$G = 6.67384(80) \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

equivalente a

$$G = (6.67384 \pm 0.00080) \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

Precisione ed accuratezza

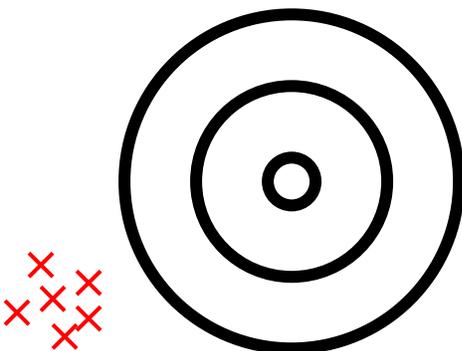
Per descrivere la bontà di una misura rispetto agli errori sistematici e casuali si utilizzano rispettivamente i termini **accuratezza** (o anche giustezza) e **precisione** che avevamo introdotto tra le caratteristiche di uno strumento di misura. Queste due qualità sono indipendenti: si possono avere misure molto accurate e poco precise o misure poco accurate e molto precise. Le varie situazioni sono illustrate nella figura seguente:



Per chiarire i due concetti di accuratezza e precisione, mostriamo i due bersagli colpiti da un tiratore preciso, ma non accurato e da un tiratore accurato, ma non preciso:

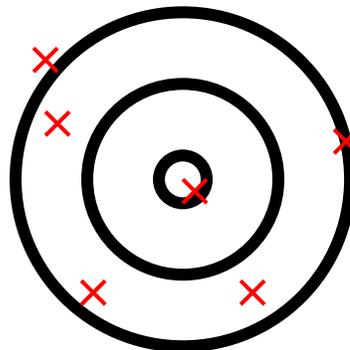
Tiratore preciso, ma non accurato

- piccoli errori casuali
- grandi errori sistematici



Tiratore accurato, ma non preciso

- piccoli errori sistematici
- grandi errori casuali



È evidente che al tiratore preciso, ma non accurato basta sistemare un po' meglio il mirino e diventa anche "accurato".

Riepilogando:

- **errore casuale** → **precisione** si riduce facendo medie di misure ripetute
- **errore sistematico** → **accuratezza** non si riduce facendo medie di misure ripetute
- **errore di lettura** → **sensibilità** si riduce facendo medie di misure ripetute solo se è presente un più elevato errore casuale

Incertezza relativa

Accanto all'incertezza di una misura, detta anche **incertezza assoluta**, si introduce anche l'**incertezza relativa**, data dal rapporto tra l'incertezza e il valore più probabile della misura

$$(4.5) \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta x}{|x|}$$

L'incertezza relativa è un numero puro, in genere molto minore di 1 e talvolta si esprime come percentuale. Le più precise misure fisiche note hanno un'incertezza relativa (o, come si dice più semplicemente, una precisione) dell'ordine di 10^{-12} (tramite la spettroscopia Mössbauer). Le normali misure che si fanno in laboratorio hanno in genere precisioni non migliori di 0.001 (cioè 0.1 %), a parte misure di tempo e frequenza che sono in genere migliori.

Un esempio

Supponiamo di fare una misura della lunghezza di un tavolo con un righello. Sia 4 metri esatti il "valore vero" della lunghezza. Sia il righello lungo 20 cm, con divisioni ogni millimetro; inoltre sia "starato", cioè il costruttore lo ha fatto 1/30 più corto di quanto sarebbe dovuto essere, ma ciò è ignoto allo sperimentatore. Leggiamo i valori misurati al millimetro.

Facciamo 50 misure. Ecco di seguito la situazione. Sono riportati nelle 7 colonne

- il numero d'ordine della misura
- il valore vero (4 m)
- l'errore sistematico (4/30 m)
- l'errore casuale, dovuto al non perfetto allineamento e giustapposizione del righello
- il valore che misurerai se la sensibilità del righello fosse 10000 volte migliore (b+c+d)
- risultato effettivo della misura (con l'errore di lettura)
- errore di lettura o di sensibilità (e-f)

Misura della lunghezza del tavolo con righello starato						
N	Valore vero	Errore sistematico	Errore casuale	Valore con errore	Risultato misura	Errore di lettura
1	4	0.133333333	-0.00346052	4.1298728	4.130	-0.0001272
2	4	0.133333333	-0.01332468	4.1200087	4.120	0.0000087
3	4	0.133333333	0.00100266	4.1343360	4.134	0.0003360
4	4	0.133333333	0.00230141	4.1356347	4.136	-0.0003653
5	4	0.133333333	-0.00917177	4.1241616	4.124	0.0001616
6	4	0.133333333	0.00952732	4.1428607	4.143	-0.0001393

7	4	0.133333333	0.00951331	4.1428466	4.143	-0.0001534
8	4	0.133333333	-0.00030107	4.1330323	4.133	0.0000323
9	4	0.133333333	0.00261834	4.1359517	4.136	-0.0000483
10	4	0.133333333	0.00139711	4.1347304	4.135	-0.0002696
11	4	0.133333333	-0.00149367	4.1318397	4.132	-0.0001603
12	4	0.133333333	0.00580632	4.1391397	4.139	0.0001397
13	4	0.133333333	-0.00470653	4.1286268	4.129	-0.0003732
14	4	0.133333333	0.01746549	4.1507988	4.151	-0.0002012
15	4	0.133333333	-0.00109117	4.1322422	4.132	0.0002422
16	4	0.133333333	0.00091145	4.1342448	4.134	0.0002448
17	4	0.133333333	0.00853415	4.1418675	4.142	-0.0001325
18	4	0.133333333	0.00047425	4.1338076	4.134	-0.0001924
19	4	0.133333333	-0.00076519	4.1325681	4.133	-0.0004319
20	4	0.133333333	-0.00665880	4.1266745	4.127	-0.0003255
21	4	0.133333333	0.00235529	4.1356886	4.136	-0.0003114
22	4	0.133333333	-0.01068945	4.1226439	4.123	-0.0003561
23	4	0.133333333	0.00571460	4.1390479	4.139	0.0000479
24	4	0.133333333	0.01298850	4.1463218	4.146	0.0003218
25	4	0.133333333	-0.00553421	4.1277991	4.128	-0.0002009
26	4	0.133333333	0.00686397	4.1401973	4.140	0.0001973
27	4	0.133333333	0.01003201	4.1433653	4.143	0.0003653
28	4	0.133333333	-0.01274984	4.1205835	4.121	-0.0004165
29	4	0.133333333	-0.01152772	4.1218056	4.122	-0.0001944
30	4	0.133333333	0.00456918	4.1379025	4.138	-0.0000975
31	4	0.133333333	-0.00319908	4.1301342	4.130	0.0001342
32	4	0.133333333	0.00551998	4.1388533	4.139	-0.0001467
33	4	0.133333333	0.00652498	4.1398583	4.140	-0.0001417
34	4	0.133333333	0.00569527	4.1390286	4.139	0.0000286
35	4	0.133333333	0.01032200	4.1436553	4.144	-0.0003447
36	4	0.133333333	0.00534880	4.1386821	4.139	-0.0003179
37	4	0.133333333	0.00952670	4.1428600	4.143	-0.0001400
38	4	0.133333333	-0.00961966	4.1237137	4.124	-0.0002863
39	4	0.133333333	-0.00015832	4.1331750	4.133	0.0001750
40	4	0.133333333	-0.00125374	4.1320796	4.132	0.0000796
41	4	0.133333333	-0.01283268	4.1205006	4.121	-0.0004994
42	4	0.133333333	0.00205843	4.1353918	4.135	0.0003918
43	4	0.133333333	-0.00845178	4.1248815	4.125	-0.0001185
44	4	0.133333333	0.01132113	4.1446545	4.145	-0.0003455
45	4	0.133333333	-0.00644072	4.1268926	4.127	-0.0001074
46	4	0.133333333	0.00422994	4.1375633	4.138	-0.0004367
47	4	0.133333333	0.00175457	4.1350879	4.135	0.0000879
48	4	0.133333333	-0.00737521	4.1259581	4.126	-0.0000419
49	4	0.133333333	-0.01736540	4.1159679	4.116	-0.0000321
50	4	0.133333333	-0.00047350	4.1328598	4.133	-0.0001402
Media	4	0.133333333	0.0003146	4.1336480	4.13374	-0.0000920
Dev.St.	0	0	0.0078078	0.0078078	0.007769	0.0002315

In fondo sono calcolate, per ogni colonna, la media aritmetica e la deviazione standard (che, come vedremo, è un indice dello sparpagliamento delle misure).

Notiamo che la media degli errori casuali è molto minore del valore assoluto medio di tali errori e lo stesso può dirsi per gli errori di lettura.

Se non ci fosse l'errore casuale, l'errore di lettura sarebbe sempre lo stesso e quindi facendone la media rimarrebbe se stesso. Quindi, paradossalmente, la presenza dell'errore casuale può ridurre l'effetto dell'errore di lettura.

Come vedremo, in questo caso possiamo valutare l'incertezza sulla media come 0.0011 m .

La misura può essere espressa come

$$4.1337 \pm 0.0011 \text{ m}$$

che non è corretta, perché c'è l'errore sistematico (ignoto e quindi non correggibile). Se il righello fosse "accurato", misureremmo 0.13333 m in meno, e avremmo

$$4.0004 \pm 0.0011 \text{ m}$$

Talvolta l'incertezza di una misura viene espressa facendo seguire il valore della misura dal valore dell'incertezza tra parentesi, sull'ultima o le ultime due cifre. Per esempio la costante gravitazionale viene espressa come $G=6.67428(67) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$, che equivale a $G=(6.67428 \pm 0.00067) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$.

5 - Rappresentazione di insiemi di misure

- Istogrammi di misure
- Media
- Deviazione standard
- Calcolo di media e varianza da istogrammi
- Calcolo di media e varianza con tre voci di memoria

Supponiamo di ripetere più volte la misura di una certa grandezza fisica g . Otteniamo un insieme di valori (le “misure” o “dati sperimentali”)

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

Un primo modo di rappresentare questi risultati è tramite dei punti sulla retta, rappresentanti i valori di g :



L'istogramma

Un modo più suggestivo e molto usato, se il numero dei dati è abbastanza grande (almeno una decina) è l'**istogramma** (o **istogramma delle frequenze**). Per realizzarlo occorre prima definire l'intervallo di interesse $\{g_{\min}, g_{\max}\}$ (per esempio l'intervallo tra il dato minimo e il massimo). Dividiamo quindi tale intervallo in un certo numero m di sotto-intervalli (in inglese "bin"). Infine contiamo quanti dati ci sono in ogni bin, indicando gli m risultati con

$$h_1, h_2, \dots, h_m$$

Questi valori, detti "frequenze", possono essere graficati in vari modi, per esempio con un grafico a sbarre.

Si noti che per fare un istogramma vanno definiti (cioè scelti) i tre valori g_{\min} , g_{\max} e m : l'aspetto (e l'utilità) dell'istogramma dipendono da questa scelta. È buona norma, per esempio, che m sia molto minore di n , ma non troppo piccolo. Infatti se è troppo grande, ci saranno molti bin vuoti e quelli “colpiti” conterranno pochissimi dati (e quindi con forti “fluttuazioni”, come vedremo in seguito); viceversa se i bin “efficaci” (cioè non vuoti) sono troppo pochi, si perderanno informazioni sull'andamento delle frequenze.

Talvolta si rappresentano le **frequenze relative**, cioè i valori h_i divisi per n , ottenendo l'**istogramma delle frequenze relative**; tali valori indicano la frazione dei dati (spesso indicata come percentuale) che cade in ciascun bin.

Talvolta l'istogramma delle frequenze relative viene rappresentato con un diagramma a torta, cioè un cerchio in cui i vari bin sono rappresentati da settori circolari di area proporzionale alla frequenza relativa di quel bin.

Può capitare di istogrammare numeri discreti (per esempio numeri interi, come per esempio i risultati di lanci di dadi). In tal caso i bin “naturali” (e spesso preferibili) sono definiti dalla discretizzazione dei dati (per esempio, nel caso dei dadi, i numeri da 1 a 6).

In un istogramma non c'è tutta l'informazione di un insieme di misure. Per esempio da un istogramma fatto con certi bin non possono ottenersi istogrammi con un altro insieme di bin (a parte casi particolari), in particolare con larghezza inferiore. Inoltre in un istogramma si perde l'ordine temporale delle misure, che è presente nelle misure originarie se sono riportate nell'ordine in cui sono state effettuate. È buona norma, quando si hanno misure successive di una grandezza che si sospetta possa essere variata tra le prime e le ultime misure, osservare il diagramma temporale delle misure effettuate: ovviamente questa informazione non è ricavabile dall'istogramma.

Nel presente corso assumiamo che le grandezze in misura non varino sensibilmente durante il periodo di osservazione. Se questo assunto non è verificato, occorre l'uso di tecniche più avanzate, sviluppate nell'ambito della teoria dei segnali. Si noti che potrebbe essere proprio la variazione della grandezza in misura la cosa più interessante in un esperimento. Vanno quindi individuate le caratteristiche di questa variazione, come per esempio la scala temporale di variazione, la presenza di periodicità o la correlazione con altre grandezze che variano per cause note.

Parametri di posizione e di dispersione: la media e la deviazione standard

Molto spesso gli istogrammi di misure ripetute mostrano un andamento a campana in cui le caratteristiche salienti sono la **posizione** del massimo della campana e un parametro che ci indichi la sua **larghezza**, cioè possiamo sintetizzare l'insieme delle nostre misure con due numeri: un parametro di posizione e un parametro di larghezza (o dispersione). Il primo ci dà il valore più plausibile della misura, mentre il secondo può indicare l'incertezza sulla singola misura. Il modo più ovvio di ottenere il parametro di posizione è fare la media aritmetica dei dati

$$(5.1) \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

tuttavia ci sono altri metodi che in certi casi possono essere preferibili, per esempio

$$(5.2) \quad \bar{x}' = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}$$

oppure, dopo aver ordinato le n misure in ordine crescente,

$$(5.3) \quad \bar{x}'' = \begin{cases} x_{(n+1)/2} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \frac{x_{n/2} + x_{n/2+1}}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

Il parametro posizionale ottenuto con quest'ultima procedura viene chiamato “**mediana**”.

Discuteremo del parametro di posizione con maggiori dettagli più avanti nel corso.

Per definire il parametro di dispersione, consideriamo gli “scarti”

$$(5.4) \quad \xi_i = x_i - \bar{x}$$

Si potrebbe quindi pensare che una ragionevole definizione della dispersione sia la media degli scarti. È facile vedere che non è così, infatti

$$(5.5) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

ciò perché gli scarti sono positivi e negativi e, facendone la somma, si cancellano esattamente tra di loro. Si potrebbe però definire il parametro di dispersione come la media di valori assoluti degli scarti e la cosa funzionerebbe. Tuttavia, per ragioni che vedremo in seguito, si preferisce introdurre la **varianza** (più correttamente “**varianza campionaria**” o “**sperimentale**”)

$$(5.6) \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

e quindi si definisce il parametro di dispersione σ come la radice quadrata della varianza; tale parametro viene chiamato **scarto quadratico medio** o **deviazione standard** (in Inglese “standard deviation”) “**campionaria**” o “**sperimentale**”), cioè ricavata dai dati sperimentali.

Sviluppiamo la formula precedente

$$(5.7) \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$$

Metodo Ricorsivo

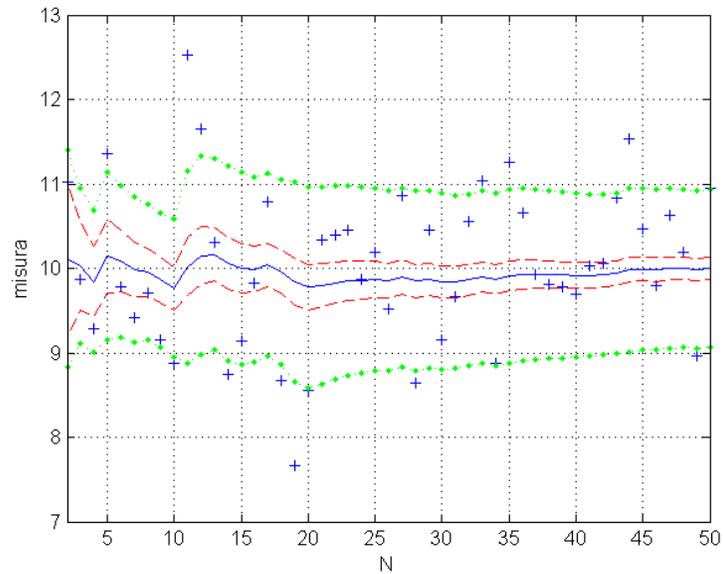
Si noti che l'ultimo sviluppo indica un modo per calcolare media e varianza con solo tre voci di memoria, come è fatto per esempio nelle calcolatrici tascabili. Il metodo usa tre voci di memoria che chiamiamo **S**, **Q** e **N**, ed è il seguente:

- al primo dato immesso x_1 poniamo **S**= x_1 , **Q**=(x_1)², **N**=1
- al dato immesso i-esimo x_i , poniamo **S**=**S**+ x_i , **Q**=**Q**+(x_i)², **N**=**i**
- dopo aver immesso n dati, possiamo calcolare media e varianza con

$$(5.8) \quad \bar{x} = \frac{S}{N}$$

$$(5.9) \quad \sigma^2 = \frac{Q}{N} - \left(\frac{S}{N} \right)^2$$

Nella figura seguente è rappresentato il risultato del calcolo ricorsivo di media e deviazione standard. Sono state simulate 50 misure di una grandezza di valore vero 10, con errore casuale di deviazione standard 1. Le misure sono indicate dalle crocette, la linea continua (blu) indica la media fatta sulle prime N misure, le linee puntinate (verdi) indicano il valore di Media \pm Deviazione Standard, mentre le linee tratteggiate (rosse) indicano l'intervallo di misura valutato come $x \pm \sigma / \sqrt{N}$. Notare la riduzione delle fluttuazioni statistiche al crescere di N e come la misura si avvicina a 10 e la deviazione standard a 1.



Media e deviazione standard da Istogramma

La media e la deviazione standard si ottengono partendo dai dati $\{\mathbf{x}_i\}$. Possiamo tuttavia calcolarle a partire dall'istogramma (eventualmente anche dall'istogramma delle frequenze relative), ottenendo risultati che possono essere leggermente differenti. Partendo dagli \mathbf{m} valori $\{\mathbf{h}_i\}$ dell'istogramma, calcolati in bin centrati agli \mathbf{m} valori $\{\mathbf{b}_i\}$, le formule sono le seguenti:

$$(5.10) \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m b_i \cdot h_i}{\sum_{i=1}^m h_i}$$

$$(5.11) \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m h_i (b_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^m h_i}}$$

L'idea è la seguente: approssimiamo i dati che capitano all'interno di un bin con il valore centrale del bin \mathbf{b}_i ; quindi, usando la proprietà commutativa, raccogliamo insieme gli \mathbf{h}_i dati di uno stesso bin e usiamo le stesse definizioni precedenti.

Trasformazioni lineari per media e deviazione standard campionarie

Se ad un insieme di numeri che hanno un media \bar{x} e una deviazione standard σ aggiungiamo una costante k , quale è la nuova media e la nuova deviazione standard ?

Sostituendo nelle formule per media e d.s. $\mathbf{x}_i + \mathbf{k}$ al posto di \mathbf{x}_i , troviamo facilmente che i nuovi parametri sono

$$(5.12) \quad \bar{x}' = \bar{x} + k \quad \sigma' = \sigma$$

cioè, la nuova media viene semplicemente aumentata del valore k e la nuova deviazione standard rimane la stessa.

Analogamente, se moltiplichiamo un insieme di numeri che hanno un media \bar{x} e una deviazione standard σ^2 per una costante k , quale è la nuova media e la nuova deviazione standard ?

Sostituendo nelle formule per media e deviazione standard $\mathbf{k x}_i$ al posto di \mathbf{x}_i , troviamo facilmente che i nuovi parametri sono

$$(5.13) \quad \bar{x}' = k \cdot \bar{x} \quad \sigma' = k \cdot \sigma$$

cioè, sia la nuova media, che la nuova deviazione standard risultano pari ai valori di \bar{x} e σ moltiplicati per k . Ovviamente la nuova varianza sarà pari al valore originario moltiplicato per k^2 .

Queste proprietà giustificano la nostra scelta di prendere come parametri di posizione e sparpagliamento rispettivamente la media aritmetica e la deviazione standard.

6 - Incertezza sulle misure indirette

- Propagazione delle incertezze nel caso di relazione lineare per una variabile
- Propagazione delle incertezze in generale per una variabile (derivate)
- Propagazione delle incertezze per più variabili (derivate parziali)

Misure indirette da una singola variabile

Ci occuperemo ora di come si può calcolare l'incertezza sulle misure indirette. Supponiamo che la misura indiretta y si ricavi dalla misura diretta x tramite l'espressione

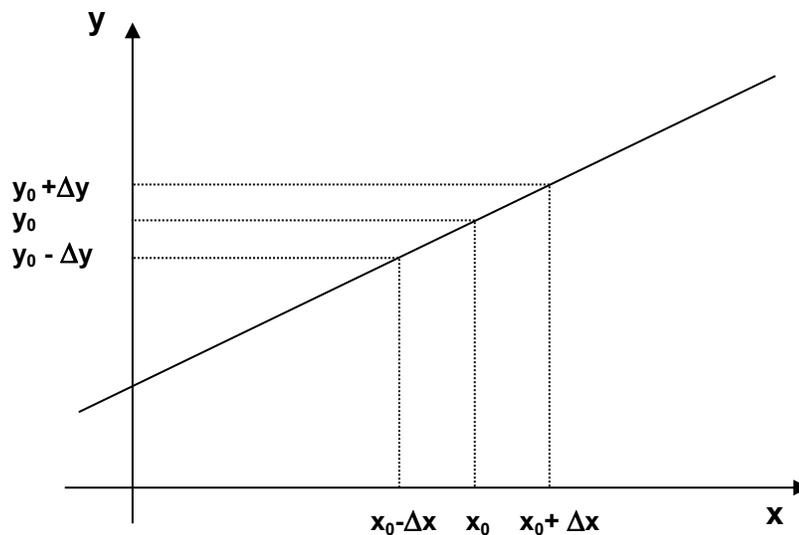
$$(6.1) \quad y = m \cdot x + q$$

È facile vedere che, se la misura diretta è $x_0 \pm \Delta x$, il valore della misura indiretta è

$$(6.2) \quad y_0 = m \cdot x_0 + q$$

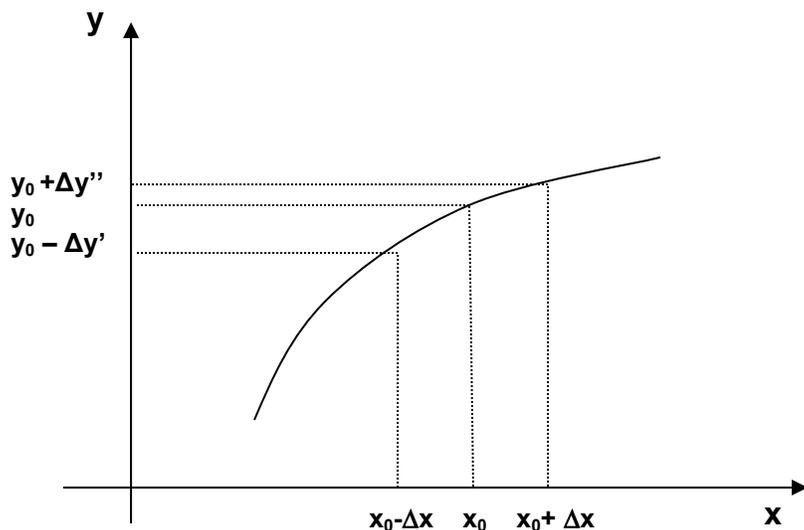
e l'incertezza su di essa è

$$(6.3) \quad \Delta y = |m| \cdot \Delta x$$



In generale, se la misura indiretta y si ottiene come $y = f(x)$, essendo x_0 il valore della misura e Δx l'incertezza, allora l'intervallo $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$ si "trasforma" nell'intervallo $(y_0 - \Delta y', y_0 + \Delta y'')$ dove

$$(6.4) \quad y_0 - \Delta y' = f(x_0 - \Delta x) \quad \text{e} \quad y_0 + \Delta y'' = f(x_0 + \Delta x)$$



Poiché $y_0 = f(x_0)$, possiamo scrivere

$$(6.5) \quad \Delta y' = f(x_0) - f(x_0 - \Delta x) \quad \text{e} \quad \Delta y'' = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ricordando che la derivata di $f(x)$ (se la funzione $f(x)$ non è "strana") è definita come

$$(6.6) \quad \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - dx)}{dx}$$

Essa rappresenta il coefficiente angolare della tangente alla curva $f(x)$ nel punto x .

Se Δx è abbastanza piccolo, la curva nell'intervallo $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$ può essere approssimata dalla tangente (si fa cioè un'approssimazione al primo ordine o lineare) e si ha

$$(6.7) \quad \Delta y' \approx \Delta y'' \approx |f'(x_0)| \cdot \Delta x$$

possiamo porre perciò

$$(6.8) \quad \Delta y = |f'(x_0)| \cdot \Delta x$$

che è quindi la formula generale per la propagazione delle incertezze quando la misura indiretta deriva da una sola misura diretta. Possiamo quindi scrivere la misura indiretta come $y_0 \pm \Delta y$.

Un caso particolare e particolarmente interessante è quello in cui una misura si ricava da un'altra tramite l'espressione

$$(6.9) \quad y = a \cdot x^k$$

in tal caso, se il valore di x è $x_0 \pm \Delta x$, abbiamo

$$(6.10) \quad y_0 = a \cdot x_0^k$$

$$(6.11) \quad \Delta y = |k \cdot a \cdot x_0^{k-1}| \cdot \Delta x$$

Vediamo ora cosa accade, in questo caso particolare, all'incertezza relativa $\varepsilon_y = \frac{\Delta y}{|y|}$,

essendo nota $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{|x|}$.

Si ha

$$(6.12) \quad \left| \frac{\Delta y}{y_0} \right| = \left| \frac{k a x_0^{k-1}}{a x_0^k} \right| \Delta x = \left| k \frac{\Delta x}{x_0} \right|$$

Questo semplicissimo risultato è molto comodo da usarsi in pratica.

Si noti che l'incertezza su y in genere varia al variare di x , anche se Δx è costante (al variare di x) (a meno che il legame tra x e y sia lineare).

Esempio: Supponiamo di conoscere il raggio r di un cerchio con l'incertezza Δr . Quale è l'incertezza assoluta sull'area del cerchio? e l'incertezza relativa?

L'area è $A = \pi \cdot r^2$, quindi, essendo la derivata di A rispetto a r pari a $2\pi \cdot r$,

$$(6.13) \quad \Delta A = 2\pi \cdot r \cdot \Delta r$$

Per l'incertezza relativa, essendo $\varepsilon_r = \frac{\Delta r}{r}$, si ha

$$(6.14) \quad \varepsilon_A = \frac{\Delta A}{A} = 2 \cdot \varepsilon_r$$

Misure indirette da più variabili

Consideriamo ora il caso in cui si ricavi una misura a partire da n diverse misure, tra loro indipendenti (vedremo in seguito cosa ciò significhi e cosa accada se questa ipotesi non è verificata). Sia

$$(6.15) \quad y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

e le incertezze sulle varie x_i pari relativamente a Δx_i . Abbiamo

$$(6.16) \quad \Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 \Delta x_i^2}$$

dove con $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ indichiamo la **derivata parziale** di f rispetto a x_i . Ricordiamo che la derivata parziale di una funzione rispetto a una variabile è calcolata come la derivata "semplice", considerando le altre variabili come costanti.

Esempio: Si abbia un parallelepipedo di lati $a \pm \Delta a$, $b \pm \Delta b$, $c \pm \Delta c$. Si voglia calcolarne il volume con la relativa incertezza.

Il volume è dato da

$$(6.17) \quad V = a \cdot b \cdot c$$

poiché

$$\frac{\partial(a \cdot b \cdot c)}{\partial a} = b \cdot c \quad \frac{\partial(a \cdot b \cdot c)}{\partial b} = a \cdot c \quad \frac{\partial(a \cdot b \cdot c)}{\partial c} = a \cdot b$$

l'incertezza è

$$(6.18) \quad \Delta V = \sqrt{(b \cdot c \cdot \Delta a)^2 + (a \cdot c \cdot \Delta b)^2 + (a \cdot b \cdot \Delta c)^2}$$

Supponiamo ora che sia $a = b = c$, cioè sia il parallelepipedo un cubo, e $\Delta a = \Delta b = \Delta c$, cioè siano le incertezze uguali. Se non ci fidiamo che sia un cubo ed eseguiamo le tre misure dei tre lati, abbiamo

$$(6.19) \quad \Delta V = \sqrt{3} \cdot a^2 \cdot \Delta a$$

Se invece ci fidiamo che sia un cubo perfetto e quindi misuriamo solo un lato, usiamo l'espressione $V = a^3$ e quindi l'incertezza è

$$(6.20) \quad \Delta V = 3a^2 \Delta a$$

Si noti che il motivo della differenza è dovuta al fatto che nel primo caso è come se avessimo fatto la media di 3 misure indipendenti, e quindi abbiamo un risultato un po' migliore.

Il caso del rapporto: Vediamo cosa accade nel caso in cui la misura indiretta deriva dal rapporto di due altre misure. Facciamo per esempio il caso del calcolo della densità, data dal rapporto tra massa e volume di un corpo. Siano il volume $V \pm \Delta V$ e la massa $m \pm \Delta m$. Si ha per la densità

$$(6.21) \quad \rho = \frac{m}{V}$$

$$(6.22) \quad \Delta \rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m} \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial V} \Delta V\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{V}\right)^2 + \left(-\frac{m \cdot \Delta V}{V^2}\right)^2}$$

Altro esempio: Un caso particolare di misura indiretta basata su più misure è quello in cui la f è semplicemente la somma delle variabili x_i

$$(6.23) \quad y = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

poiché le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sono in questo caso tutte pari a 1, per l'incertezza su y si ha

$$(6.24) \quad \Delta y = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}$$

Si noti che questa formula può essere vista come una generalizzazione del teorema di Pitagora, cioè l'espressione della diagonale massima di un parallelepipedo in n dimensioni, e dà un valore che è sempre inferiore alla somma dei lati. Giustificeremo in seguito questa espressione; per ora basti pensare che è dovuta al fatto che gli errori casuali sono sia positivi che negativi e quindi nella somma si cancellano parzialmente tra di loro.

Se le Δx_i sono tutte eguali tra di loro,

$$(6.25) \quad \Delta y = \Delta x \cdot \sqrt{n}$$

Il caso della media: questo è un caso particolarmente interessante, perché è ciò che si fa quando abbiamo più misure ripetute, e in tal caso in genere le incertezze sono tutte eguali. Si ha

$$(6.26) \quad y = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \bar{x}$$

le derivate parziali sono $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{n}$, quindi

$$(6.27) \quad \Delta y = \sqrt{\frac{1}{n^2} (\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2)} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2} = \frac{1}{n} \sqrt{n \cdot \Delta x^2} = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}}$$

quindi l'incertezza sulla media di n misure è \sqrt{n} volte più piccola dell'incertezza sulla singola misura.

Un altro caso particolare è quello in cui

$$(6.28) \quad y = k \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_N^{k_N}$$

In tal caso la formula dell'**incertezza relativa** è particolarmente semplice e comoda da usare:

$$(6.29) \quad \frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(k_i \frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^2}$$

Da questa possiamo ricavare l'incertezza assoluta moltiplicando per y.

Vogliamo notare un problema che sorge nell'incertezza relativa nel caso in cui la misura indiretta consiste nella differenza di due misure. Si debba calcolare

$$(6.30) \quad y = a - b$$

a partire dalle due misure $\mathbf{a} \pm \Delta \mathbf{a}$ e $\mathbf{b} \pm \Delta \mathbf{b}$; per l'incertezza si ha

$$(6.31) \quad \Delta y = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2}$$

l'incertezza relativa è

$$(6.32) \quad \frac{\Delta y}{y} = \frac{\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2}}{a - b}$$

Se \mathbf{a} è vicino a \mathbf{b} , questa incertezza relativa può crescere anche molto (se $a=b$, va a infinito; ovviamente in questo caso l'incertezza relativa non ha senso).

L'espressione

$$(6.33) \quad \Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

detta **errore massimo** viene talvolta utilizzata per scopi particolari. Il valore di questa espressione è sempre superiore a quello ottenuto con l'espressione (6.16) come è facile dimostrare. Infatti, consideriamo le due espressioni

$$(6.34) \quad A = \left(\sum_i w_i \right)^2$$

e

$$(6.35) \quad B = \sum_i w_i^2$$

in cui le w_i sono tutte positive. Esse rappresentano rispettivamente il quadrato della (6.33) e della (6.16). È immediato vedere che è sempre $A > B$, a causa dei termini misti (i doppi prodotti del quadrato del polinomio) che sono tutti positivi.

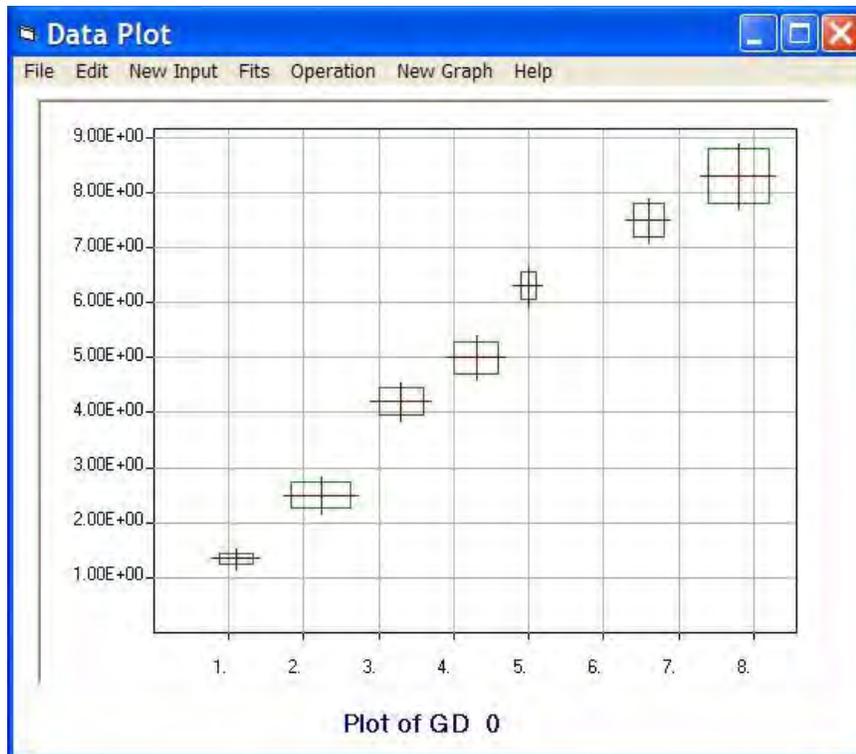
7 - Grafici

- Incertezze nei grafici
- Grafici semi-logaritmici
- Grafici doppio-logaritmici

Spesso si eseguono misure diverse di una grandezza fisica al variare di un parametro. I dati in genere si rappresentano con un grafico con i valori del parametro (per esempio x) sulle ascisse e quelli delle misure della grandezza in esame (per esempio y) sulle ordinate. È fondamentale riportare sugli assi le grandezze che sono rappresentate e le unità di misura.

Incetnze nei grafici

Le incertezze sulle misure del parametro e della grandezza sono rappresentate riportando (in vari possibili modi) gli intervalli di incertezza (“error boxes” in Inglese). Vedi per esempio:



Grafici semi-logaritmici

Talora nel fare i grafici è conveniente l'uso di una scala logaritmica per uno dei due assi, cioè si grafica il logaritmo della grandezza in funzione del parametro o la grandezza in funzione del logaritmo del parametro. Ciò può offrire vantaggi nei seguenti casi:

- Siamo interessati ad osservare le variazioni della grandezza in esame al variare del parametro in modo percentuale. Un tipico parametro che spesso viene rappresentato sulle ascisse in modo logaritmico è la frequenza.
- Le variazioni della grandezza per taluni valori del parametro sono molto più grandi che per altri: una rappresentazione con ordinata lineare ridurrebbe praticamente a 0 i valori piccoli, mentre usando un'ordinata logaritmica possiamo apprezzare le variazioni su tutte le scale.
- L'andamento della grandezza rispetto al parametro è esponenziale del tipo $y = a \cdot e^{k \cdot x}$ dove a e k sono numeri reali. Prendendo $Y = \log y$ e $A = \log a$, abbiamo

$$(7.1) \quad Y = \log(a \cdot e^{k \cdot x}) = A + k \cdot x$$

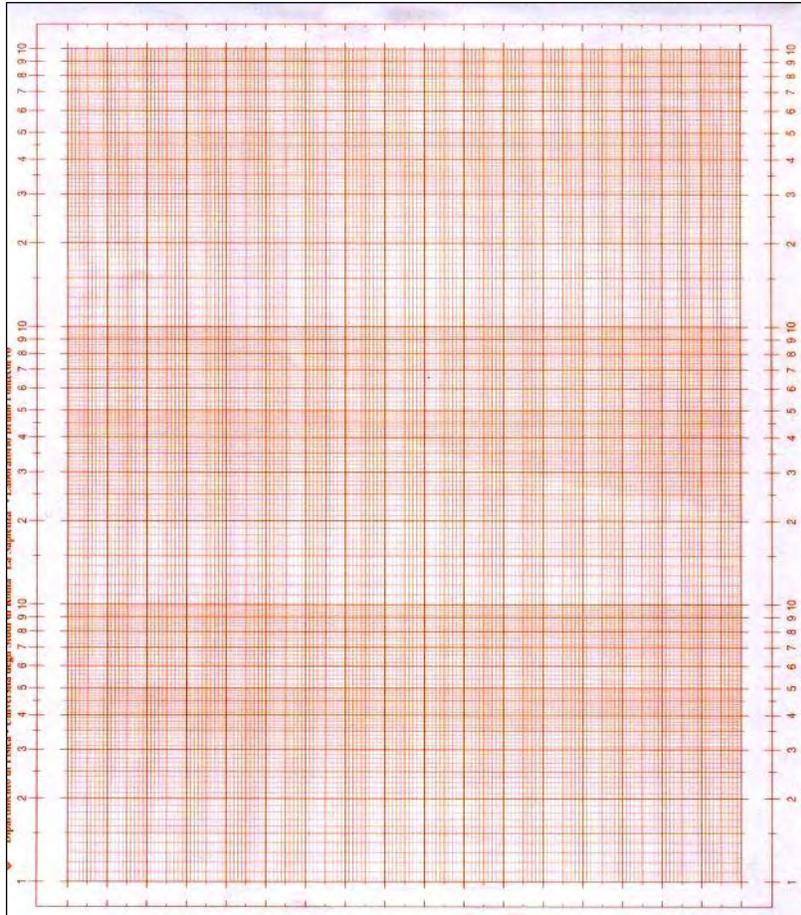
e l'andamento esponenziale diventa lineare, e dai coefficienti della retta sono facilmente ricavabili i parametri dell'andamento esponenziale.

- L'andamento della grandezza rispetto al parametro è logaritmico del tipo $y = a \cdot \log(k \cdot x)$. Possiamo sviluppare $\log(k \cdot x) = \log k + \log x$. Se prendiamo $X = \log x$ e $K = a \cdot \log k$, abbiamo

$$(7.2) \quad y = K + a \cdot X$$

e quindi anche in questo caso abbiamo un andamento lineare, facilmente verificabile e di cui è facile, dal grafico, calcolare i parametri.

In questi casi è spesso comodo l'uso di una carta speciale detta carta millimetrata semi-logaritmica in cui uno degli assi (in genere quello "lungo") è "grigliato" in modo logaritmico. Caratteristica importante è il numero di "decadi" che sono riportate sull'asse logaritmico.



Carta semilogaritmica

Grafici doppio-logaritmici

In altri casi è comodo graficare il logaritmo della grandezza in funzione del logaritmo del parametro. Ciò è particolarmente comodo nel caso in cui il legame funzionale tra grandezza e parametro è del tipo $y = a \cdot x^k$, dove a è un numero reale positivo e k un numero reale qualsiasi. Infatti in tal caso, prendendo il logaritmo dei due termini, abbiamo

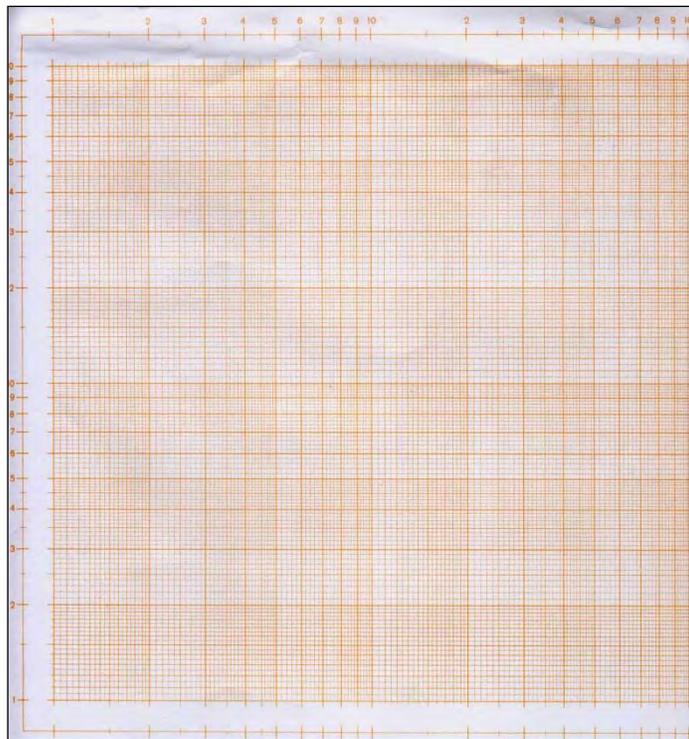
$$(7.3) \quad Y = \log y, \quad X = \log x \quad \text{e} \quad A = \log a$$

e quindi

$$(7.4) \quad Y = \log(a \cdot x^k) = \log a + k \cdot \log x = A + k \cdot X$$

e quindi un andamento con legge di potenza k diventa un andamento lineare con pendenza k . Per semplificare questo tipo di grafici si può utilizzare la carta doppio-logaritmica.

Carta doppio-logaritmica

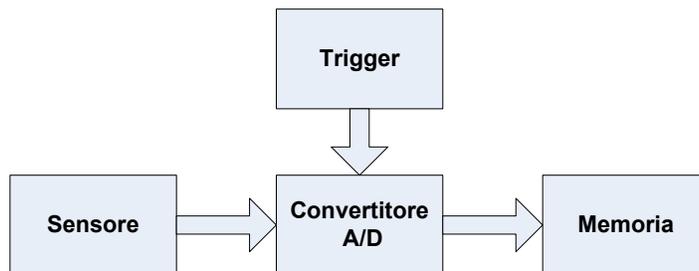


Quando si usa una carta logaritmica, la prima cosa da fare è l'"assegnazione delle decadi", cioè stabilire quale potenza del 10 è rappresentata in ciascuna decade.

8 – Sistemi di acquisizione e analisi dati

Un sistema di acquisizione dati, autonomo o collegato ad un computer, permette di fare più misure successive di una certa grandezza fisica.

Lo schema generale è il seguente:



Un sistema di acquisizione dati è quindi uno strumento di misura digitale corredato di un “trigger”, cioè un sistema che indica gli istanti in cui effettuare la misura, e di una “memoria” in cui vengono immagazzinate le misure.

Il trigger spesso è semplicemente un “orologio” (clock in inglese) che genera impulsi periodici con una data frequenza, detta frequenza di campionamento (sampling frequency); l’inverso di questo valore è detto “tempo di campionamento” (sampling time). In questo caso il sistema di acquisizione è detto “a campionamento uniforme” e le misure vengono dette “dati campionati” (sampled data) o semplicemente campioni (samples).

In casi più complessi il trigger invia l’impulso (o comando) di conversione quando sono verificate particolari condizioni.

Associato a un sistema di acquisizione e non sempre distinto da esso è il software di “monitoraggio” delle misure effettuate ed eventualmente di analisi dei dati memorizzati.

Campionamento uniforme e operazioni su dati campionati

(argomento da rivedere con più attenzione dopo aver studiato la statistica e in connessione con le esperienze fatte col sistema di acquisizione)

Nel caso del campionamento uniforme, scelto il tempo di campionamento Δt , si ha una successione di misure $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ a distanza ognuna dalla precedente di Δt . Queste misure possono essere schematizzate come

$$(8.1) \quad x_i = s_i + n_i$$

dove s_i sono i valori “veri” della grandezza in misura (detti anche il **segnale**) ed n_i gli errori di misura (detti anche il **rumore**). Anche in questo caso gli errori di misura sono dati dalla somma di

- errori di lettura (detto in questo caso **errore di quantizzazione**)
- errori casuali
- errori sistematici
- disturbi esterni, in altre parole il nostro sistema di misura non è solo sensibile alla grandezza in misura, ma anche ad altri effetti fisici

Spesso la successione delle misure $\{x_i\}$ può essere trasformata tramite opportuni calcoli al fine di ridurre il “rumore” cioè gli errori di misura. Questa operazione viene detta genericamente “filtraggio”.

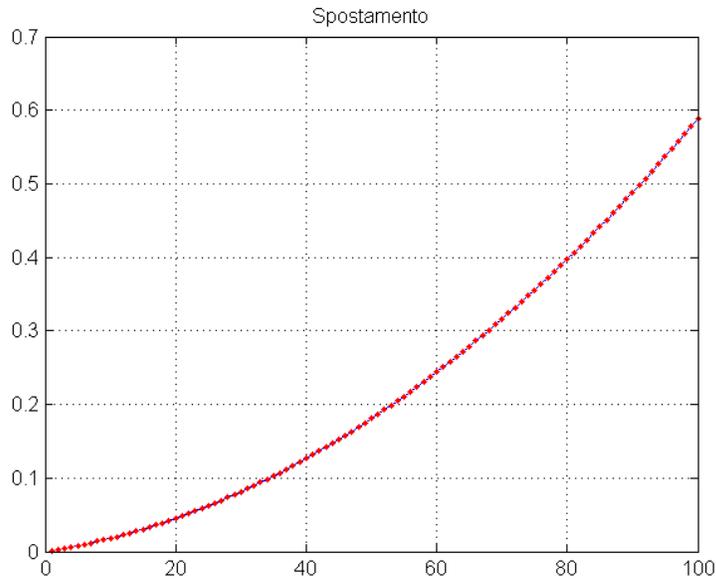
Altre operazioni possono farsi sui dati campionati. Per esempio può farsi una valutazione della derivata del segnale facendo il rapporto incrementale

$$(8.2) \quad s'_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}$$

o della derivata seconda con il rapporto incrementale del rapporto incrementale, ovvero

$$(8.3) \quad s''_i = \frac{\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} - \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{x_i - 2 \cdot x_{i-1} + x_{i-2}}{\Delta t^2}$$

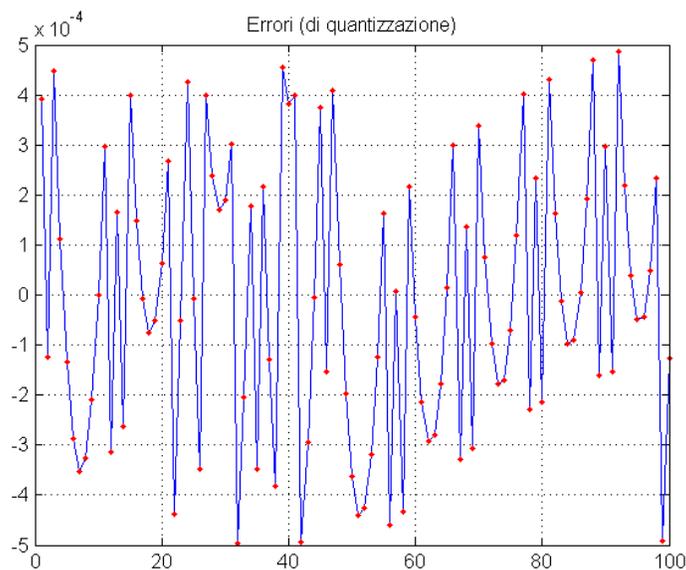
Queste semplici procedure hanno però il difetto di aumentare di molto gli errori relativi. Per illustrare il fenomeno facciamo l'esempio della misura di spostamento (in una dimensione) di un corpo soggetto a una forza costante. Sia la legge oraria:



l'equazione del moto è

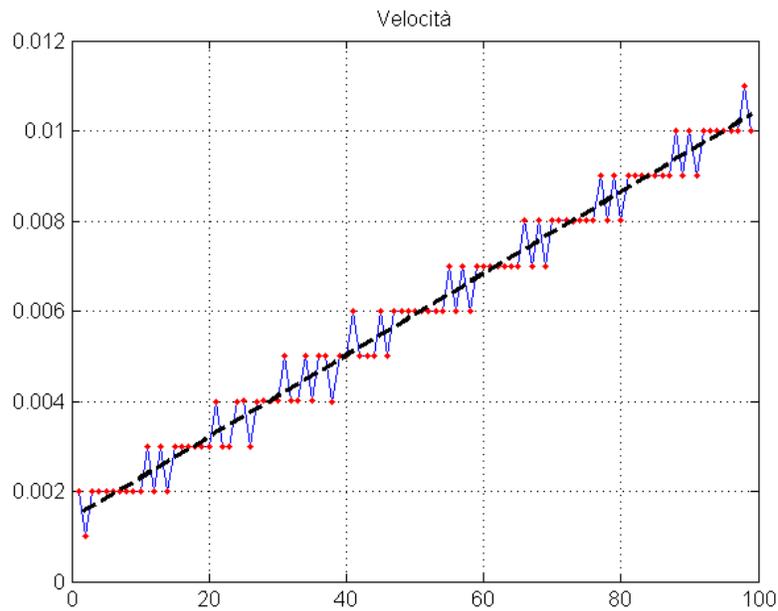
$$(8.4) \quad s = 0.00134673 \cdot t + 0.00004532 \cdot t^2 \text{ m}$$

i dati sono acquisiti uno al secondo e con la precisione di 1 mm; sono assenti errori casuali, sistematici e disturbi esterni, quindi sono presenti solo errori di quantizzazione, di cui mostriamo il grafico

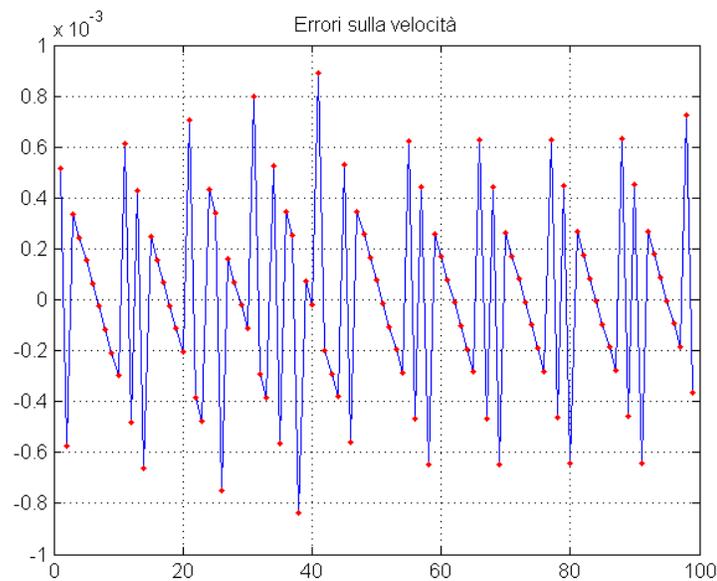


Notiamo che questi errori non sono indipendenti e, ovviamente, hanno un range di ± 0.5 mm. La media è praticamente 0, la deviazione standard è 0.274 mm (in buon accordo col valore teorico di $1/\sqrt{12}$ mm), l'errore relativo medio è circa 0.0012 .

Ed ecco il grafico del rapporto incrementale (valutazione della velocità):

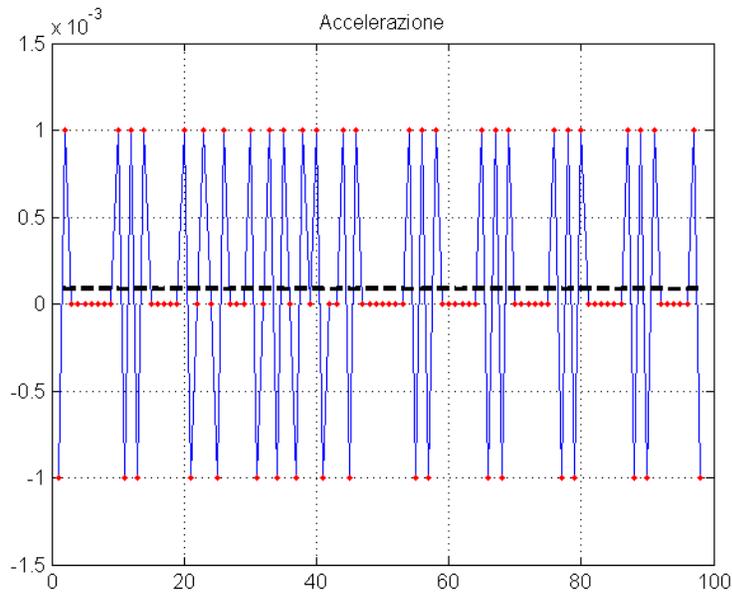


la riga tratteggiata è il valore vero della velocità, l'altra è il valore ricavato col rapporto incrementale: si vede che ci sono delle fluttuazioni piuttosto evidenti, in questo caso abbastanza regolari. Ecco gli errori (le differenze tra i due andamenti)



anche in questo caso gli errori non sono indipendenti, la loro media è praticamente 0 e la deviazione standard è circa 0.389 mm/s, in accordo col valore teorico, ricavato dalla (8.2), $\sqrt{2} / \sqrt{12}$ mm/s; l'errore relativo medio è ora 0.0657, oltre 50 volte peggiore di quello sullo spostamento.

Passiamo ora ad analizzare la valutazione dell'accelerazione dai dati:



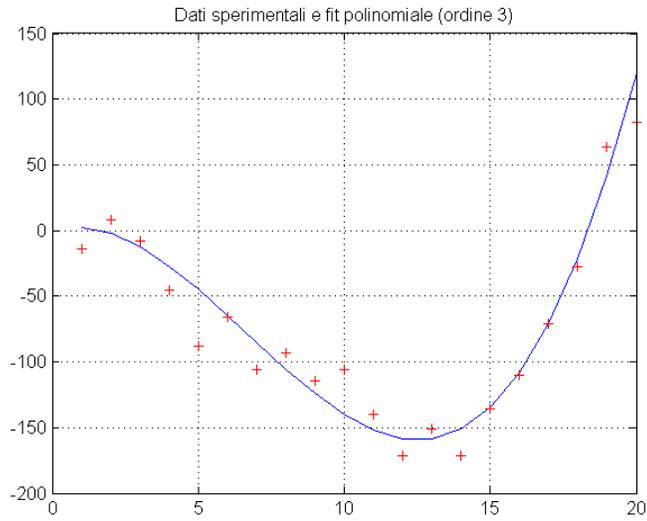
anche in questo caso la riga spessa tratteggiata indica il valore vero, costante; in questo caso gli errori sono talvolta molto più grandi della grandezza osservata. La media degli errori è anche in questo caso praticamente 0, la deviazione standard è 0.684 mm/s^2 (abbastanza in accordo col valore teorico, ricavato dalla (8.3), di $\sqrt{6} / \sqrt{12} \text{ mm/s}^2$). L'errore relativo medio è ora circa 7.5! (circa 6000 volte maggiore dell'errore relativo medio sui dati originali di spostamento). Questi enormi errori hanno tuttavia media nulla, pertanto se l'accelerazione cercata è costante, essa può ottenersi con piccolo errore facendo la media di tutti i valori.

Introduzione ai fit

Se si ha un grafico con dati sperimentali, del tipo che abbiamo visto nel precedente capitolo o ottenuto con un sistema di acquisizione, è molto spesso utile trovare una semplice legge che descriva, eventualmente in modo approssimato, questi dati. Per fare ciò si sceglie una famiglia di curve (per esempio i polinomi di un certo grado), definite ciascuna dal valore di uno o più parametri (per esempio i coefficienti della curva).

Questa operazione viene detta “**fit**” (curve fitting) o **analisi di regressione**.

Tipicamente le curve che si usano per il fit sono rette o polinomi.



Molti software di analisi statistica (incluso Excel) prevedono il fit lineare e polinomiale.

Una volta eseguito un fit, è molto utile analizzare i “residui”, cioè le differenze tra i dati e i valori della curva di fit.

L'uso dei fit può risultare molto utile per evitare problemi come quelli visti nel paragrafo precedente nella valutazione della derivata dei dati campionati: la valutazione della derivata può farsi calcolando analiticamente la derivata della curva usata per il fit.

Parte seconda - Probabilità e statistica

9 - Teoria delle Probabilità

- Definizione di probabilità
- Teoria assiomatica delle probabilità
- Probabilità condizionata
- Indipendenza stocastica

La **probabilità** è un numero, compreso tra 0 e 1, che indica il grado di possibilità che un certo evento si verifichi: esso è 1 se l'evento è certo, 0 se è impossibile.

La **Teoria delle Probabilità** è la disciplina matematica che si occupa di determinare quantitativamente il valore della probabilità nei vari casi. I primi matematici che si occuparono di probabilità furono **Gerolamo Cardano** (1501-1576), **Blaise Pascal** (1623-1662), **Pierre de Fermat** (1601-1665) e i fisici **Galileo Galilei** (1564-1642) e **Christiaan Huygens** (1629-1695) fecero lavori nel campo. Questi studi erano legati ai giochi d'azzardo, e da queste poco nobili origini deriva il termine "aleatorio" (da *alea*, in latino dado) uno degli aggettivi più usati per definire il tipo di eventi oggetto del calcolo delle probabilità. In seguito **Jacob Bernoulli** (1655-1705), **Abraham de Moivre** (1667-1754), **Thomas Bayes** (1702-1761), **Pierre-Simon de Laplace** (1749-1827) e **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) posero le basi del moderno calcolo delle probabilità.

Laplace propose quella che è detta la **definizione classica** di probabilità:

“La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, purché questi siano egualmente possibili”

Per esempio, supponiamo di avere un dado “perfetto”, per cui tutte le facce siano equiprobabili, allora l'evento “uscita di un numero dispari” (cioè 1, 3 o 5) ha probabilità

$$\frac{3}{6} = 0.5$$

Ovviamente se il dado è irregolare, la probabilità delle varie facce non è uguale e quindi la definizione precedente non ci è di aiuto. Potremmo fare uno studio accurato della forma e della struttura interna del dado e ricavarne le probabilità delle varie facce, ma ciò potrebbe risultare molto complesso se non praticamente impossibile. Un altro modo di procedere è quello empirico: si lancia il dado moltissime volte e si calcola il numero di volte che ciascuna faccia esce (facendo attenzione a lanciare il dado “bene”, cioè senza favorire anche involontariamente alcuna faccia) e si applica la seguente definizione, detta **definizione frequentista**:

“La probabilità di un evento è il limite al crescere all'infinito delle prove, della frequenza dell'evento, cioè del rapporto tra il numero delle prove favorevoli (in cui l'evento si verifica) e il numero totale delle prove”

Questa definizione si basa sulla cosiddetta **Legge Empirica del Caso** o **Legge dei Grandi Numeri**, secondo cui in una successione di prove ripetute, la frequenza di un evento si avvicina alla probabilità dell'evento stesso (ovviamente se tale probabilità la possiamo conoscere in modo non frequentista).

Tuttavia non sempre si possono fare un alto numero di prove ripetute, anzi a volte vorremmo conoscere la probabilità di eventi che non sono ripetibili. Per esempio, quale è la probabilità che domenica la squadra X vinca la partita? Oppure quale è la probabilità che domani piova? Oppure ancora qual è la probabilità che esistano sorgenti periodiche di onde gravitazionali di almeno una certa potenza entro un raggio di 1 kpc (kiloparsec, una unità di distanza astronomica non SI, ma usatissima in astrofisica). Per usare il calcolo delle probabilità per questo tipo di eventi è stata introdotta, dal matematico italiano **Bruno De Finetti** (1906-1985), la **definizione soggettiva** di probabilità:

“La probabilità di un evento è il grado di fiducia (variabile da soggetto a soggetto) riposta nel verificarsi dell'evento stesso”

In particolare questa definizione di probabilità ha portato allo sviluppo della cosiddetta statistica bayesiana.

Teoria assiomatica delle probabilità

Indipendentemente dalla definizione operativa di probabilità (classica, frequentista o soggettiva), **Andrei Kolmogorov** introdusse nel 1933 la definizione assiomatica di probabilità. In essa si evita di entrare nel significato di probabilità, e si considera solo l'aspetto matematico-formale, usando il formalismo della teoria degli insiemi. In essa

- gli “eventi” sono definiti come tutti i sottoinsiemi di uno spazio ambiente S ,
- tra due eventi si definisce l'unione \cup come l'occorrenza di almeno uno degli eventi dell'unione e l'intersezione \cap come l'occorrenza di entrambi;
- viene definito \bar{A} l'evento opposto di un evento A come l'evento tale che $A \cup \bar{A} = S$ e $A \cap \bar{A} = \emptyset$, dove \emptyset è l'insieme vuoto.

Per definire la probabilità si parte dai seguenti assiomi:

- I. Ad ogni sottoinsieme A di S è associato un numero reale $p(A)$, detto probabilità di A , compreso, estremi inclusi, tra 0 e 1
- II. $p(S) = 1$
- III. Se l'intersezione tra gli eventi A e B è vuota, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Facciamo un semplice esempio. Lo spazio S sia l'insieme delle carte di un mazzo da 52 carte da poker; gli eventi siano i sottoinsiemi di qualsiasi numero di carte, per esempio

- a) i 4 assi
- b) le carte di cuori
- c) il sottoinsieme composto dal 2 di quadri e il 3 di fiori.

Associamo a ciascun sottoinsieme la probabilità di estrarre una carta appartenente ad esso, per esempio la probabilità associata al sottoinsieme a) è $1/13$, quella associata al b) è $1/4$, quella associata al c) è $1/26$. Per illustrare l'ultimo assioma, pensiamo all'unione dei due sottoinsiemi b) e c): essi sono disgiunti, hanno cioè intersezione nulla, quindi per l'ultimo assioma la probabilità associata al sottoinsieme unione è $1/13 + 1/26 = 3/26$.

A partire dagli assiomi di Kolmogorov, possono essere dedotti tutti i teoremi del calcolo delle probabilità. Tra i più semplici, i seguenti

Teorema 1. $p(A) = 1 - p(\bar{A})$

si deduce dagli assiomi II e III, infatti per definizione $A \cap \bar{A} = \emptyset$ e $A \cup \bar{A} = S$ e $p(S) = 1$, quindi $1 = p(A) + p(\bar{A})$, da cui l'asserto

Teorema 2. $p(\emptyset) = 0$

si deduce da II e dal teorema 1., infatti $\bar{\emptyset} = S$.

Teorema 3. Se $A \subseteq B$, allora $p(A) \leq p(B)$

si deduce dal fatto che \mathbf{A} è un sottoinsieme di \mathbf{B} .

Teorema 4. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Si ha :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= [P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})] + [P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)] - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

la prima eguaglianza è per l'assioma III, la seconda è immediata, la terza usa il fatto che $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$ e $(A \cap B)$ e $(A \cap \bar{B})$ hanno intersezione nulla, e analogamente $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = B$ e $(A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B) = \emptyset$.

Probabilità condizionata

Introduciamo ora il concetto di **probabilità condizionata**. Definiamo $p(A|B)$ la probabilità di A dato B, cioè la probabilità dell'evento A se è occorso l'evento B.

Si dimostra che

$$(9.1) \quad p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

e da questa si deduce

$$(9.2) \quad p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B) = p(B|A) \cdot p(A)$$

Si noti che la probabilità condizionata può vedersi come la definizione di un nuovo spazio ambiente ridotto, che non è più **S**, ma **B**.

Esempio: calcoliamo la probabilità condizionata di avere l'asso di picche (evento **A**), se è uscita una carta di picche (evento **B**): in tal caso, intuitivamente, mentre la probabilità di avere l'asso di picche senza nessuna condizione è $1/52$, la stessa, sotto la condizione di avere estratto una carta di picche è $1/13$.

Usando la formula, poiché $p(A) = 1/52$, $p(B) = 1/4$ e $p(A \cap B) = 1/52$ (lo stesso valore di **p(A)**, perché **A** è un sottoinsieme di **B**), abbiamo il risultato $1/13$.

Se $p(A|B) = p(A)$, se cioè la probabilità di un evento A non è influenzata dall'occorrenza di un evento B, è facilmente dimostrabile che $p(B|A) = p(B)$ e diciamo che i due eventi sono **indipendenti** o anche **stocasticamente indipendenti**.

Nel caso di eventi indipendenti, dalle precedenti equazioni deduciamo che

$$(9.3) \quad p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Si noti che se due eventi A e B sono incompatibili, o mutuamente esclusivi, cioè se quando capita uno, non capita l'altro, ovvero se la loro intersezione è nulla, essi **non sono** indipendenti. In tal caso si ha, per l'assioma III, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

La statistica

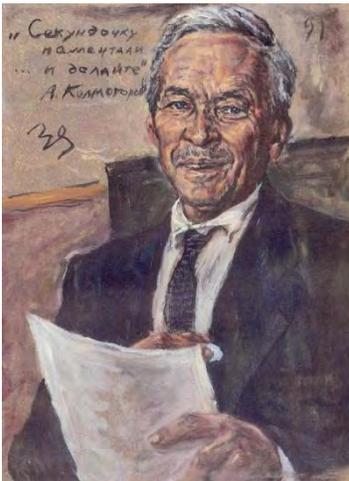
La statistica si occupa dello studio quantitativo delle caratteristiche di insiemi omogenei di oggetti (per esempio l'insieme degli abitanti di un paese, degli studenti di una classe, degli atomi in una stanza, delle misure di una grandezza, eccetera); l'insieme omogeneo di oggetti viene detto **popolazione**.

Il termine statistica deriva da “stato” e in origine era la scienza che descriveva numericamente uno stato (come è noto i primi censimenti, per motivi militari o di tassazione, risalgono agli albori della civiltà, per esempio quello riportato nel Libro dei Numeri, uno dei primi cinque libri della Bibbia). Inizialmente lo studio veniva effettuato considerando tutti gli individui della popolazione. Solo successivamente, per lo più nella seconda metà del XIX secolo, fu introdotto il calcolo delle probabilità nello studio della statistica. Tra i primi a propugnare questo passaggio furono **Adolphe Quetelet** (1796-1874), **Siméon-Denis Poisson** (1781-1840), **Francis Galton** (1822-1911) e **Karl Pearson** (1857-1936). In seguito a questa introduzione, lo studio della statistica poté essere fatto tramite **campioni**, cioè sotto-insiemi della popolazione.

Cardano, Fermat, Pascal, Jacob e Daniel Bernoulli, Bayes



de Moivre, Laplace, Gauss, Poisson, Kolmogorov e De Finetti



10 - Combinatoria

- Permutazioni
- Permutazioni con ripetizione
- Combinazioni
- Disposizioni
- Disposizioni con ripetizione

Nel calcolo della probabilità in molti casi è fondamentale l'uso dell'analisi combinatoria. Introduciamo pertanto alcuni concetti e risultati fondamentali utili a tale scopo.

Permutazioni. Supponiamo di avere N oggetti distinti, in quanti modi possiamo ordinarli? Per esempio, siano gli N oggetti un mazzo di 40 carte da gioco, in quanti modi distinti possiamo mescolarle? Chiamiamo "permutazione" uno dei distinti ordinamenti.

Siano gli N oggetti $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$; per il primo abbiamo N possibilità di scelta, quindi per il secondo ne abbiamo $N-1$ (le rimanenti carte, avendo scelto quella da mettere per prima), per il terzo $N-2$, fino ad arrivare all'ultima, in cui abbiamo una sola possibilità. Quindi il numero totale delle permutazioni di N oggetti è

$$N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Introduciamo ora la funzione **fattoriale del numero intero N** ¹¹

$$(10.1) \quad N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (N-1) \cdot N$$

Per convenzione, si pone $0! = 1$.

Quindi diciamo che il numero delle permutazioni di N oggetti è $N!$ (pronunciato N fattoriale).

Spesso, per valori grandi di N , il fattoriale viene approssimato con la formula di de Moivre – Stirling:

$$(10.2) \quad N! \approx \sqrt{2\pi N} \cdot \left(\frac{N}{e}\right)^N$$

che è un'approssimazione della serie di Stirling

$$(10.3) \quad N! \approx \sqrt{2\pi N} \cdot \left(\frac{N}{e}\right)^N \cdot \left(1 + \frac{1}{12 \cdot N} + \frac{1}{288 \cdot N^2} - \frac{139}{51840 \cdot N^3} - \frac{571}{2488320 \cdot N^4} + \dots\right)$$

¹¹ Una generalizzazione della funzione fattoriale è la funzione Γ (gamma), definita per tutto l'asse reale (a parte singolarità). Si ha, per n intero non negativo, $\Gamma(n+1) = n!$.

Permutazioni con ripetizione. Supponiamo ora che gli N oggetti non siano tutti distinguibili, ma ce ne siano N_1 di un tipo, N_2 di un altro, ..., N_M di un altro ancora.

Per esempio supponiamo di avere 7 palline rosse, 5 gialle e 8 blu: in quanti modi possiamo ordinare tali palline, sapendo che non possiamo distinguere tra palline dello stesso colore? La soluzione in generale, è

$$(10.4) \quad \frac{N!}{N_1!N_2!\dots N_M!}$$

come ci si può facilmente convincere pensando che, all'interno di ciascun sottogruppo, non esistono permutazioni (o meglio, tutte le permutazioni sono tra loro indistinguibili).

Disposizioni. Definiamo come numero di disposizioni di N oggetti di classe k , tutti i modi distinti in cui si possono disporre k oggetti scelti tra gli N (ovviamente $k \leq N$).

Per esempio quante coppie di lettere distinte si possono formare? In questo caso per il primo oggetto abbiamo N scelte, per il secondo $N-1$, ..., per il k -esimo $(N-k+1)$, quindi

$$(10.5) \quad N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (N-k+1) = \frac{N!}{(N-k)!}$$

Può anche vedersi come il numero di modi in cui possono disporsi k oggetti distinti in $N > k$ celle (da cui il nome *disposizioni*).

Le disposizioni possono vedersi come una generalizzazione delle disposizioni.

Disposizioni con ripetizione. Supponiamo ora che nel caso precedente, tra i k oggetti disposti, si possano ripetere i singoli oggetti (e quindi può anche essere $k > N$). Per ogni oggetto disposto quindi abbiamo sempre N possibili scelte.

È questo per esempio il caso dei numeri scritti con la notazione posizionale, quindi il problema equivale al seguente: quanti numeri si possono scrivere con k cifre usando la base N ? La soluzione, come è immediato dimostrare è

$$(10.6) \quad N^k$$

Combinazioni. Supponiamo ora di avere N oggetti distinti e di volerne scegliere da questi k , senza tenere conto dell'ordinamento. Un tale tipo di scelta è detto "combinazione".

Per esempio, in quanti modi diversi possiamo estrarre 5 numeri da un'urna contenente i numeri da 1 a 90? (cioè, quale è il numero totale delle cinque del gioco del lotto?). È chiaro che i numeri da 1 a 90 vengono divisi in due insiemi: quelli che appartengono alla cinquina scelta e quelli che non ci appartengono, e all'interno di ciascun insieme non conta la "disposizione" (cioè l'ordinamento).

Il numero delle combinazioni di classe k (a k a k) di N oggetti è

$$(10.7) \quad \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

che in genere viene indicato con

$$(10.8) \quad \binom{N}{k}$$

e viene chiamato **coefficiente binomiale**; infatti se consideriamo lo sviluppo del binomio

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^N$, $\binom{N}{k}$ è pari al coefficiente del termine contenente la potenza \mathbf{k} di \mathbf{a} (o di \mathbf{b}). È immediato vedere che

$$(10.9) \quad \binom{N}{k} = \binom{N}{N-k}$$

Si noti che il numero di combinazioni di classe \mathbf{k} di \mathbf{N} oggetti è pari al numero di permutazioni di \mathbf{N} oggetti appartenenti a due classi di oggetti indistinti, una di \mathbf{k} elementi ed una di $(\mathbf{N}-\mathbf{k})$ elementi. E infatti le due classi non sono altro che quella degli oggetti “scelti” e quella degli oggetti “non scelti”, all’interno delle quali il meccanismo delle combinazioni non fa differenza.

Così nello sviluppo della potenza del binomio si hanno 2^N termini monomi, che sono tutte le possibili disposizioni con ripetizione di \mathbf{N} simboli dei due tipi \mathbf{a} o \mathbf{b} ; a causa della commutatività della moltiplicazione, non si distingue la posizione dei simboli nel monomio e tutti i termini monomi con \mathbf{k} volte \mathbf{a} e $\mathbf{N}-\mathbf{k}$ volte \mathbf{b} possono essere raccolti in un termine $a^k b^{N-k}$ con un coefficiente pari a quanti ce ne sono: da qui il risultato che tale coefficiente è pari al numero di combinazioni di classe \mathbf{k} di \mathbf{N} elementi.

Esempi:

1. **Nel gioco del totocalcio si devono indovinare i risultati di 14 partite¹², segnando per ciascuna 1 se si prevede vinca la squadra di casa, 2 se si prevede che perda e X se si prevede un pareggio. Quante sono le possibili “colonne” vincenti del totocalcio ?**

Si vede che in questo caso ci troviamo di fronte a un problema di disposizioni con ripetizione, dove \mathbf{N} è eguale a 3 e \mathbf{k} eguale a 14, quindi il numero totale è $3^{14} = 1594323 \cdot 3 = 4782969$. Si noti tuttavia che in genere la probabilità di indovinare il pronostico è maggiore di $1/3^{14}$, perché gli scommettitori possono avere informazioni a priori: a parte le informazioni sulla forza delle due squadre relative ad ogni partita, o ad informazioni particolari sullo stato di forma dei giocatori, è noto che comunque è favorita la squadra di casa e quindi conviene puntare su pronostici con più

¹² Fino al 2004 le partite in schedina erano 13.

“1” che “2”. Una ricerca fatta su oltre 30000 partite inserite nelle schedine del totocalcio in oltre 50 anni, ha evidenziato le seguenti percentuali:

1	47 %
2	18 %
X	35 %

Quindi la colonna vincente più probabile è quella che prevede tutte vittorie in casa (tutti 1) e ha probabilità¹³ $0.47^{14} \approx \frac{1}{39000} \gg \frac{1}{4782969}$, che è circa 120 volte più alta del caso che i risultati fossero equiprobabili.

2. Quante sono le probabilità di avere un solo “6” in 3 lanci di un dado “onesto” ?

Per fare questo calcolo di probabilità, calcoliamo quante sono tutti i possibili risultati del lancio di 3 dadi e quanti di questi contengono un solo “6”: tutti i lanci possibili sono $6^3=216$ e di questi $3 \cdot 5^2 = 75$ contengono un solo “6” (questo 6 infatti può essere il valore del primo, del secondo o del terzo dado, per qualsiasi dei 5 possibili valori degli altri due che non sia un “6”). La probabilità è quindi $75/216 \approx 0.3472$.

3. Quante sono le probabilità di avere almeno un “6” in 3 lanci di un dado “onesto” ?

Per fare questo calcolo di probabilità, potremmo considerare tutti i possibili risultati del lancio di 3 dadi e calcolare quanti di questi contengono un “6”, quanti due “6” e quanti tre e fare quindi il rapporto tra la somma di questi numeri e il numero totale di tutti i possibili risultati: si ha

$$\frac{75+15+1}{216} \approx 0.42129$$

Allo stesso risultato possiamo arrivare con un ragionamento più semplice, domandandoci quale sia la probabilità di non avere nessun “6” lanciando 3 dadi: questa si può calcolare o facendo il rapporto tra il numero di casi in cui non si ha nessun “6” (semplicemente $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$) e dividendolo per tutti i casi possibili ($6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$) o, calcolandola come il cubo della probabilità di non avere “6” in un lancio, quindi $(5/6)^3 \approx 0.5787$: la probabilità cercata è quindi la complementare di questa probabilità, $1 - (5/6)^3 \approx 0.42129$.

4. Quali sono le probabilità delle varie vincite al gioco del Lotto ?

Nel gioco del Lotto si estraggono per ogni concorso 5 numeri da un’urna che ne contiene 90 (i numeri da 1 a 90). Vengono quindi premiati i giocatori che indovino 1 (“estratto semplice”), 2 (“ambo”), 3 (“terno”), 4 (“quaterna”) o tutti e 5 (“cinquina”).

¹³ Con 13 partite in schedina si ha $0.47^{13} \approx \frac{1}{18000} \gg \frac{1}{1594323}$

Per calcolare le probabilità dei vari tipi di vincita, calcoliamo prima quante sono le possibili combinazioni di k oggetti su N possibili. Come sappiamo questi sono $\binom{N}{k}$, quindi il numero di

tutti i possibili estratti semplici, ambi, terni, quaterne e cinquine è rispettivamente $\binom{90}{1} = 90$,

$$\binom{90}{2} = 4005, \binom{90}{3} = 117480, \binom{90}{4} = 2555190, \binom{90}{5} = 43949268.$$

Ma con 5 numeri estratti possiamo avere $\binom{5}{1} = 5$ estratti semplici, $\binom{5}{2} = 10$ ambi, $\binom{5}{3} = 10$

terni, $\binom{5}{4} = 5$ quaterne e $\binom{5}{5} = 1$ cinquina, quindi per calcolare le probabilità dobbiamo calcolare i rispettivi rapporti tra queste due quantità. Si ha

	Probabilità	Il Lotto paga	Rapporto tra vincita equa e vincita vera
Estratto semplice	$\frac{1}{18}$	11.232	1.602
Ambo	$\frac{2}{801}$	250	1.602
Terno	$\frac{1}{11748}$	4250	2.764
Quaterna	$\frac{1}{511038}$	80000	6.388
Cinquina	$\frac{1}{43949268}$	1000000	43.949

Nella tabella sono anche riportate le vincite pagate dal Lotto (in numero di volte la posta). I calcoli sono stati fatti supponendo le giocate su una sola "ruota".

11 - Variabili casuali discrete

- Variabili casuali discrete
- Distribuzione di probabilità
- Valor medio
- Varianza

A volte i risultati possibili di un esperimento probabilistico (cioè in cui ad ogni possibile risultato è associata una probabilità di occorrenza) sono un insieme discreto di numeri (cioè un numero finito o un'infinità numerabile); per esempio:

- il numero uscito (1,2,...,6) nel lancio di un dado "onesto"
- la somma di valori usciti nel lancio di due dadi "onesti" ($v_i = i + 1$ per $1 \leq i \leq 11$)
- il numero uscito (1,2,...,6) nel lancio di un dado "disonesto"
- il numero estratto da un'urna del lotto moltiplicato per 2π ($v_i = 2\pi i$)
- il numero di punti fatto in una partita di calcio da una squadra che gioca in casa (3 per la vittoria, 1 per il pareggio e 0 per la sconfitta, $v_1=0, v_2=1, v_3=3$)
- il numero di particelle rivelate da un rivelatore in un dato intervallo di tempo (da 0 a un numero molto alto, dipendente dalla risoluzione del rivelatore, che possiamo convenzionalmente dire infinito)
- il voto che uno studente prenderà ad un dato esame {0, 18, 19,..., 30, 33, dove da 18 a 30 sono veri voti, mentre 0 e 33 indicano il non superamento dell'esame e il 30 e lode)
- il numero di studenti che saranno presenti domani

Definiamo in tal caso "**variabile casuale (o aleatoria) discreta**" la variabile v che può assumere i possibili numeri "risultato" $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ (con N eventualmente infinito), su cui sono definite le probabilità di occorrenza $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$. Si ha

$$(11.1) \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1$$

che si deduce dal fatto che le $\{v_i\}$ sono tutti e soli i possibili risultati dell'esperimento, incompatibili tra loro. La successione $\{p_i\}$ è detta **distribuzione di probabilità** della variabile casuale v_i . Per esempio, negli esempi di sopra,

- se il dado è "onesto", $p_i = \frac{1}{6}$
- per $1 \leq i \leq 6$, $p_i = \frac{i}{36}$; per $7 \leq i \leq 11$, $p_i = \frac{12-i}{36}$
- per esempio, per un dado truccato che favorisce l'uscita del 6, si può avere $p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=0.15$ e $p_6=0.25$
- $p_i = \frac{1}{90}$
- per esempio, $p_1 = 0.18$, $p_2 = 0.35$, $p_3 = 0.47$

- f) per esempio, $p_i = \frac{\alpha^i e^{-\alpha}}{i!}$, dove i è il numero di particelle e α un parametro dipendente dalla situazione sperimentale.

Si noti che la distribuzione di probabilità descrive completamente un esperimento probabilistico con un numero discreto di possibili risultati. Se ripetiamo molte volte l'esperimento e istogrammiamo i risultati $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$, (ciascuno degli x_k è uno dei possibili valori v_i) per la legge dei grandi numeri la frequenza f_i dei vari risultati si avvicinerà, al crescere del numero M di ripetizioni, sempre più alla loro probabilità:

$$(11.2) \quad f_i \rightarrow p_i$$

L'insieme dei risultati $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$, osservati nelle M prove è detto **campione**; talora sono detti **campioni** (**samples** in Inglese) i singoli risultati. Nel caso in cui gli x_k provengano da un processo di misura, sono detti anche misure o dati sperimentali (o semplicemente dati).

Data una variabile casuale discreta v_i , definiamo **valore atteso** o **valor medio** della variabile v il numero

$$(11.3) \quad E[v] = \sum_i v_i p_i$$

spesso il valore atteso di una variabile v viene indicato con μ_v o, quando non ci sono possibili equivoci, semplicemente con μ .

Negli esempi precedenti abbiamo

- a) $E[v] = \frac{21}{6} = 3.5$. Si noti che, sebbene i risultati siano tutti interi, in questo caso il valore atteso non è uno dei risultati e non è neanche intero.
- b) $E[v] = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 11 + 1 \cdot 12}{36} = 7$. Si noti che il valore atteso della somma di due dadi è pari alla somma dei valori attesi: è questo un risultato generalizzabile.
- c) $E[v] = 0.15 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 0.25 \cdot 6 = 3.75$. Si noti che in questo caso il valore atteso è un po' maggiore di quello del dado "onesto": ciò perché il "6", che è il valore più alto, è più probabile degli altri risultati.
- d) $E[v] = 91\pi$. Notare che in questo caso, sebbene la variabile casuale sia discreta, i risultati possibili non sono interi.
- e) $E[v] = 0.18 \cdot 0 + 0.35 \cdot 1 + 0.47 \cdot 3 = 1.76$
- f) $E[v] = \alpha$

Per la legge dei grandi numeri, per un gran numero di prove la frequenza del risultato v_i tende alla probabilità p_i , quindi la media aritmetica dei risultati tende al valore atteso. Per esempio, se sommiamo i risultati di mille lanci di un dado "onesto" e dividiamo questa somma per il numero

dei lanci (ottenendo così la media aritmetica dei risultati), questo valore tende a 3.5 al tendere all'infinito del numero dei lanci. Cioè per M tendente a infinito

$$(11.4) \quad \bar{x} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M x_j \rightarrow \sum_i p_i v_i$$

Per comprendere bene questo risultato, notiamo che la media \bar{x} può ottenersi dall'istogramma di frequenza come

$$(11.5) \quad \bar{x} = \sum_i f_i v_i$$

(vedi anche capitolo 5) e poiché $f_i \rightarrow p_i$, allora $\bar{x} \rightarrow \mu$.

Una media pesata di M numeri è una combinazione lineare degli M numeri, in cui i coefficienti hanno per somma 1. Il valore atteso può essere visto come una **media pesata** dei valori della variabile casuale, con "pesi" pari ai p_k , cioè una media in cui i vari termini non "pesano" allo stesso modo, ma proporzionalmente ai p_k .

Le espressioni $E[v] = \sum_i v_i p_i$ e $\bar{x} = \sum_i f_i v_i$ sono medie pesate.

L'operatore "valore atteso" $E[.]$ può essere applicato a qualsiasi funzione della variabile casuale. Data una funzione $y=f(v)$,

$$(11.6) \quad E[y] = \sum_i p_i y_i = \sum_i p_i f(v_i)$$

Per esempio, se $y = v^2$, nell'esempio a) si ha $E[v^2] = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6} = 15.1\bar{6}$. Il valore atteso della funzione costante $y=k$ (indipendente da x_i) è k .

Data una distribuzione di probabilità, definiamo **varianza della distribuzione** il parametro

$$(11.7) \quad \begin{aligned} \sigma^2 &= E\left[(v - E[v])^2\right] = E[v^2 - E[v]^2] = E[v^2] - E[v]^2 = \sum_i v_i^2 p_i - \left(\sum_i v_i p_i\right)^2 = \\ &= \sum_i p_i \cdot (v_i - \mu)^2 \end{aligned}$$

Definiamo **deviazione standard della distribuzione** σ la radice quadrata della varianza.

Nell'esempio a) abbiamo $\sigma^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{182-147}{12} = \frac{35}{12} = 2.91\bar{6}$ e la deviazione standard è $\sigma \approx 1.707$.

ATTENZIONE ! Non confondere i parametri che descrivono un insieme di dati sperimentali (il "campione"), cioè la media e la varianza campionaria (o "sperimentale"),

da quelli che descrivono la distribuzione da cui i dati sono estratti, cioè il valor medio e la varianza della distribuzione (o, come anche si dice, della "popolazione"), che chiameremo anche "varianza teorica". Quando ci sarà possibilità di equivoco, indicheremo le grandezze campionarie (varianza, deviazione standard, covarianza, ecc... campionarie) con una tilde "~" sopra o, se si vuole sottolineare il fatto che si tratta di una stima di un parametro della popolazione (vedi capitolo sulla stima), con una cuspide "^".

Ripetendo più volte un esperimento probabilistico, la **varianza campionaria** tende, al crescere del numero delle prove M , alla **varianza della distribuzione**:

$$(11.8) \quad \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M x_k^2 - \bar{x}^2 \rightarrow \sum_{i=1}^N v_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^N v_i p_i \right)^2$$

12 - Distribuzioni discrete

- Distribuzione uniforme discreta
- Distribuzione binomiale
- Distribuzione di Poisson

Distribuzione uniforme discreta

Sia $v_i = a + i - 1$, per $1 \leq i \leq N$, e $p_i = 1/N$ dove a è un numero intero. Esempi di questa distribuzione è per esempio il lancio di un dado (“onesto”), per cui $a = 1$ e $N = 6$, o l'estrazione di un numero dall'urna del Lotto, dove $a = 1$ e $N = 90$. Possiamo calcolare il valor medio e la varianza

$$(12.1) \quad \mu = E[v] = a + \frac{N-1}{2}$$

$$(12.2) \quad \sigma^2 = \frac{(N-a+1)^2 - 1}{12}$$

Nel caso del dado si ha $\mu = 3.5$ e $\sigma^2 = \frac{35}{12} = 2,91\bar{6}$.

Distribuzione di Bernoulli

Consideriamo una variabile casuale con due possibili valori, 1 e 0. Sia p la probabilità associata al valore 1 e $(1-p)$ la probabilità dello 0. Questa semplice distribuzione viene chiamata distribuzione di Bernoulli, dal nome del matematico svizzero Jakob Bernoulli.

Il valore atteso è quindi

$$(12.3) \quad \mu = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

e la varianza è

$$(12.4) \quad \begin{aligned} \sigma^2 &= (0 - \mu)^2 \cdot (1-p) + (1 - \mu)^2 \cdot p = \mu^2 - \mu^2 p + p - 2\mu p + \mu^2 p = \\ &= p^2 + p - 2p^2 = p \cdot (1-p) \end{aligned}$$

Distribuzione binomiale

Supponiamo di fare delle prove ripetute i cui possibili risultati sono due: chiamiamoli convenzionalmente “**successo**” e “**insuccesso**”. Per esempio eseguiamo il lancio di un dado e consideriamo “successo” (**S**) l’uscita del “2” o del “6” e “insuccesso” (**I**) gli altri casi. La successione dei risultati delle varie prove potrà essere descritta per esempio dalla seguente successione

S S I S I I I S I I S....

Una successione di prove di questo tipo, cioè con due soli possibili risultati è detta successione di **prove alla Bernoulli**.

Il problema che ci poniamo è: data la probabilità di successo **p** (e di insuccesso **q = 1 - p**) e il numero di prove **N**, quale è la probabilità di avere **k** successi ?

Notare che non interessa l’ordine dei successi, ma solo il numero totale **k**, che può essere compreso tra 0 (nessun successo) e **N** (nessun insuccesso).

Per calcolare questa probabilità, notiamo che la probabilità di avere **k** successi in un preciso ordine è data dal prodotto delle probabilità dei successivi risultati, quindi, nel caso precedente,

$$p \cdot p \cdot q \cdot p \cdot q \cdot q \cdot q \cdot p \cdot q \cdot q \cdot p \cdot \dots$$

che, per le proprietà della moltiplicazione, può essere scritta come

$$(12.5) \quad p^k q^{N-k} = p^k (1-p)^{N-k}$$

Poiché non ci interessa l’ordine, abbiamo $\binom{N}{k}$ casi equivalenti (cioè con lo stesso numero di successi, ma con diverso ordine). Ricordiamo che $\binom{N}{k}$ è il numero delle combinazioni di classe **k** di **N** oggetti. La probabilità è quindi

$$(12.6) \quad p_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

k è quindi una variabile casuale discreta con valori possibili gli interi da **0** a **N** e probabilità **p_k**. La distribuzione di **p_k** è nota come **distribuzione binomiale**¹⁴.

Verifichiamo che $\sum_k p_k = 1$. Per far ciò notiamo che la potenza **N**-esima del binomio (p+q), che vale 1, si può sviluppare con

¹⁴ Nel caso di **N=1**, la distribuzione binomiale coincide con la distribuzione di Bernoulli.

$$(12.7) \quad (p+q)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = 1$$

q.e.d. . .

Possiamo calcolare il valore atteso e la varianza della distribuzione binomiale. Per il valore atteso abbiamo

$$(12.8) \quad E[k] = \sum_{k=0}^N k \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = N \cdot p$$

che è un risultato intuitivo. Il calcolo diretto è complicato; si può però fare con un semplice “trucco”: ricordiamo che

$$(12.9) \quad (p+q)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = 1$$

possiamo ora derivare parzialmente rispetto a p i primi due termini, ottenendo

$$(12.10) \quad \frac{\partial (p+q)^N}{\partial p} = N(p+q)^{N-1} = N = \sum_k k \binom{N}{k} p^{k-1} q^{N-k}$$

moltiplicando per p gli ultimi due termini dell'eguaglianza, abbiamo

$$(12.11) \quad N \cdot p = \sum_k k \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

q.e.d.

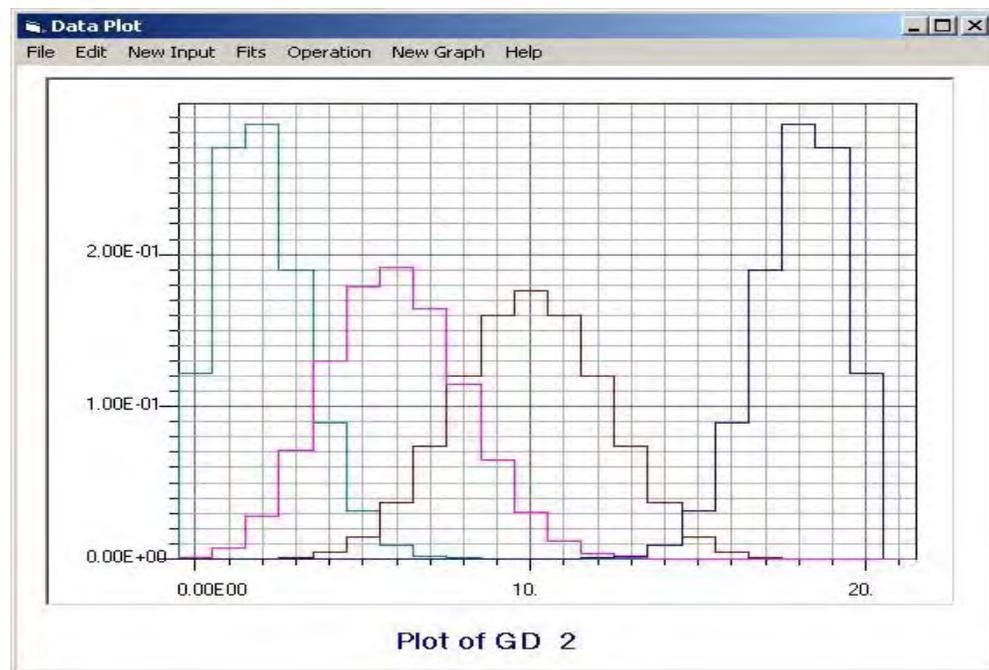
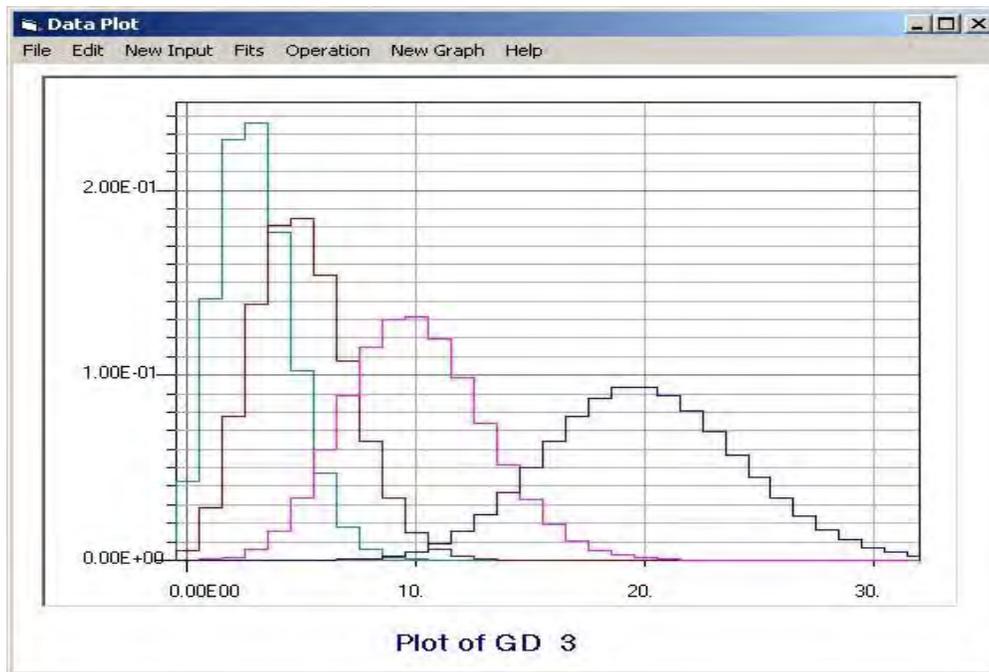
Per la varianza si calcola

$$(12.12) \quad \sigma^2 = E[(k - N \cdot p)^2] = \sum_{k=0}^N (k - N \cdot p)^2 \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = N \cdot p \cdot q$$

(la dimostrazione è nell'Appendice). La deviazione standard quindi è

$$(12.13) \quad \sigma = \sqrt{N \cdot p \cdot q}$$

Di seguito sono riportati alcuni andamenti della distribuzione binomiale (calcolati con SnagLab), nella prima figura per $p = 0.1$ e $N = 20, 50, 100, 200$ e nella seconda figura per $N = 20$ e $p = 0.1, 0.3, 0.5, 0.9$ (notare la simmetria del caso $p = 0.5$ e la simmetria reciproca tra i casi $p = 0.1$ e $p = 0.9$).



Se $p = \frac{1}{2}$, allora la distribuzione binomiale diventa semplicemente

$$(12.14) \quad p_k = \binom{N}{k} \frac{1}{2^N}$$

il valor medio è $\mu = \frac{N}{2}$ e la deviazione standard è $\sigma = \frac{\sqrt{N}}{2}$.

Prove alla Bernoulli: i run

In una successione di prove alla Bernoulli chiamiamo “run” una successione ininterrotta di successi o insuccessi. Per esempio

SSISIIISIISSSSIIIS

Contiene 9 run, di cui 5 di successi (SS S S SSSS S) e 4 di insuccessi (I III III II).

Se abbiamo una successione di N prove alla Bernoulli, quanti run ci aspettiamo? e quanti di ciascun tipo e ciascuna lunghezza? (per semplicità supporremo che N sia molto grande e che quindi sia trascurabile l'effetto dei bordi).

La probabilità di avere un run di successi iniziante alla i -esima prova è pari al prodotto delle probabilità di avere un insuccesso alla prova precedente e un successo a quella prova, quindi $(1-p) \cdot p$ e quindi il numero aspettato di run di successi è

$$(12.15) \quad N_{run}(S) = N \cdot p \cdot (1-p)$$

Applicando il ragionamento analogo per gli insuccessi, otteniamo lo stesso risultato

$$(12.16) \quad N_{run}(I) = N \cdot p \cdot (1-p)$$

come era da aspettarsi, poiché ovviamente i run di successi e insuccessi si alternano (a parte agli estremi).

Calcoliamo ora il numero aspettato di run di successi di lunghezza k ; un run di successi di lunghezza k iniziante all' i -esima prova deve avere k successi consecutivi ed essere preceduto e seguito da un insuccesso, quindi la probabilità di ciò è $(1-p)^2 \cdot p^k$, quindi

$$(12.17) \quad N_{run}(S^{(k)}) = N \cdot p^k \cdot (1-p)^2$$

avendo indicato con $S^{(k)}$ un run di k S. Analogamente per i run di insuccessi si ha

$$(12.18) \quad N_{run}(I^{(k)}) = N \cdot p^2 \cdot (1-p)^k$$

Ricordiamo che, per $a < 1$,

$$(12.19) \quad \sum_{i=1}^{\infty} a^i = \frac{a}{1-a}$$

e quindi

$$(12.20) \quad \sum_{k=1}^{\infty} N_{run}(S^{(k)}) = N \cdot (1-p)^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} p^k = N \cdot p \cdot (1-p) = N_{run}(S)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_{run}(I^{(k)}) = N \cdot p^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k = N \cdot p \cdot (1-p) = N_{run}(I) = N_{run}(S)$$

che mostra la coerenza delle formule trovate.

È molto semplice calcolare anche il numero di run di lunghezza *almeno* k : nel calcolo precedente basta non imporre il valore successivo al k -esimo

$$(12.21) \quad N_{run}(S^{(\geq k)}) = N \cdot p^k \cdot (1-p)$$

e

$$(12.22) \quad N_{run}(I^{(\geq k)}) = N \cdot p \cdot (1-p)^k$$

Si noti che se facciamo una serie di prove alla Bernoulli, un controllo sul numero di run trovati può “tranquillizzarci” sull’indipendenza delle prove.

Se non trovassimo risultati coerenti con quanto ora calcolato, dovremmo supporre che le nostre prove ripetute non sono indipendenti (e quindi non “alla Bernoulli”). Ci sono modelli più complessi per trattare questi casi (per esempio le **catene di Markov**), ma sono argomenti che esulano dal presente corso.

Distribuzione di Poisson

Consideriamo ora il fenomeno del decadimento radioattivo. I nuclei di taluni isotopi hanno la proprietà di emettere particelle, trasformandosi (“decadendo”) in altri nuclei.

Se si osserva un campione di materia composta da un certo isotopo, si possono osservare con dei particolari strumenti (come per esempio il contatore Geiger) le particelle emesse. Queste emissioni avvengono in modo casuale nel tempo e dato un campione di materia radioattiva e un contatore disposto in un certo modo, è definito un numero medio di decadimenti in un certo intervallo di tempo. Tale **numero medio** μ (che può anche non essere intero) è **proporzionale alla lunghezza dell'intervallo**, cioè

$$(12.23) \quad \mu = \lambda \cdot \Delta t$$

dove Δt è la lunghezza dell'intervallo e λ è una costante (cioè non varia nel tempo e quindi non varia μ , mentre ovviamente varia il numero di particelle rivelate in intervalli successivi eguali).

Un fenomeno con caratteristiche probabilistiche di questo genere viene chiamato un **processo di Poisson** (dal nome di Siméon-Denis Poisson, 1781-1840).

Ci sono molti fenomeni che, almeno in approssimazione, possono essere descritti come un processo di Poisson: per esempio la rivelazione dei raggi cosmici tramite un contatore di particelle, le telefonate che arrivano ad un centralino, l'esplosione dei pop corn nella padella, ecc. . Tutti questi esempi non sono esattamente descritti da un processo di Poisson, perché il numero medio per unità di tempo varia nel tempo (per esempio di notte ci sono meno telefonate al centralino) e quindi non è neanche proporzionale all'ampiezza dell'intervallo.

Se definiamo un intervallo di tempo, in presenza di un processo di Poisson, possiamo definire una variabile casuale discreta k , intera non negativa ($0 \leq k < \infty$). Tale variabile segue la cosiddetta **distribuzione di Poisson**.

Per ricavare l'espressione della distribuzione di Poisson, dividiamo idealmente l'intervallo di tempo in un numero molto elevato N di intervallini larghi $\frac{\Delta t}{N}$, così elevato da avere un numero

aspettato molto piccolo di particelle (“eventi”) nell'intervallino $\varepsilon = \frac{\mu}{N} \ll 1$. In una tale

situazione, quasi tutti gli intervallini non conterranno eventi e solo una piccola frazione ε ne conterranno uno e praticamente nessuno due (se quest'ultima condizione non fosse verificata, potremmo aumentare ancora N).

Possiamo ora considerare la successione degli intervallini come una successione di N prove ripetute alla Bernoulli, con probabilità di successo $p = \varepsilon$. La probabilità di avere k eventi si potrebbe quindi calcolare con una distribuzione binomiale, anche se nel caso estremo di $N \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow 0$, restando tuttavia, ovviamente,

$$(12.24) \quad N \cdot p = \mu$$

Applichiamo queste condizioni alla distribuzione binomiale $p_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$. Si nota che, per $k \ll N$,

$$(12.25) \quad \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!} = \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-k+1)}{k!} \approx \frac{N^k}{k!}$$

inoltre

$$(12.26) \quad (1-p)^{N-k} = \left(1 - \frac{\mu}{N}\right)^{N-k} \approx \left(1 - \frac{\mu}{N}\right)^N \rightarrow e^{-\mu}$$

e quindi, sostituendo le varie espressioni limite e $N \cdot p = \mu$, abbiamo la **distribuzione di Poisson**

$$(12.27) \quad P(k; \mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

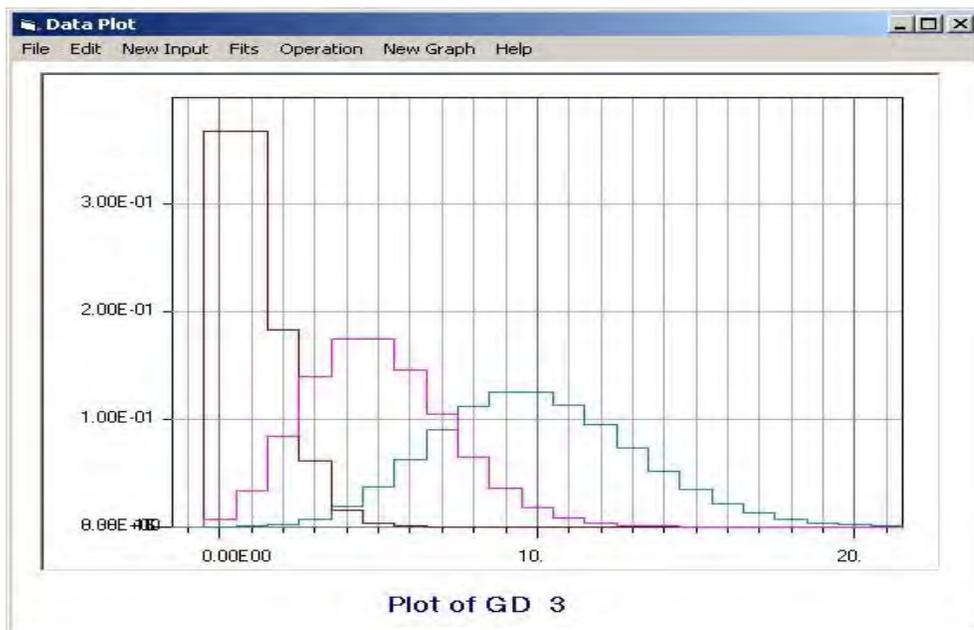
Il calcolo del valore aspettato e della varianza discende immediatamente dal caso limite della binomiale e si ha

$$(12.28) \quad E[k] = N \cdot p = \mu$$

$$(12.29) \quad \sigma^2 = N \cdot p \cdot (1-p) \rightarrow N \cdot p = \mu$$

Si noti che questa distribuzione ha un solo parametro (μ), mentre la binomiale ne ha due (N e p).

In figura ci sono alcuni andamenti della distribuzione di Poisson, per $\mu = 1, 5, 10$:



La formula della distribuzione di Poisson (12.27) può essere approssimata, per valori abbastanza grandi di k , usando la formula di De Moivre-Stirling (10.2) ottenendo

$$(12.30) \quad P(k; \mu) = \frac{e^{-\mu}}{\sqrt{2\pi k}} \cdot \left(\frac{\mu \cdot e}{k} \right)^k$$

Tempi d'attesa tra due eventi di un processo di Poisson

Se abbiamo un processo di Poisson con un dato valore della densità λ , il valore aspettato dell'intervallo di tempo tra due eventi è, come è intuitivo, semplicemente

$$(12.31) \quad E[T_0] = \frac{1}{\lambda}$$

Vogliamo ora valutare la distribuzione di T_0 . Per farlo faremo uso dello stesso espediente con cui abbiamo calcolato la distribuzione di Poisson: supporremo che l'asse dei tempi sia diviso in un grandissimo numero di intervallini, N ogni unità di tempo, e la presenza di un evento in un dato intervallino sia da vedere come un successo con probabilità p molto piccola, tale che sia praticamente nulla la probabilità di avere due eventi in uno qualsiasi degli intervallino considerati. Si deve avere

$$(12.32) \quad \lambda = N \cdot p$$

Possiamo quindi vedere il processo come una successione di prove alla Bernoulli.

Ricordiamo i ragionamenti fatti sulla lunghezza dei run nelle prove alla Bernoulli. Nel nostro caso ci interessa la probabilità che, essendo accaduto un evento in un dato intervallino, esso sia seguito da almeno k intervallini "vuoti": essa è $(1-p)^k$.

Quindi, ponendo $k = T \cdot N$,

$$(12.33) \quad \Pr(T_0 > T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N \cdot T} = e^{-\lambda T}$$

Come vedremo in seguito, ciò porta per T_0 a una distribuzione continua di probabilità di tipo esponenziale.

13 - Variabili casuali continue

- Densità di probabilità
- Funzione di distribuzione cumulativa
- Valor medio e varianza
- Mediana e moda
- Asimmetria e curtosi
- Disuguaglianza di Chebyshev
- Somma di variabili casuali indipendenti

Quando i possibili risultati di un esperimento probabilistico sono costituiti da uno o più intervalli (eventualmente infiniti) di numeri reali, definiamo tali risultati come una **variabile casuale continua**. Facciamo qualche esempio:

- a) L'altezza di un generico ragazzo italiano di venti anni
- b) La lunghezza dei cilindretti prodotti da una fresa
- c) L'errore casuale in una misura con alta sensibilità

Una caratteristica delle variabili casuali continue è che, a parte casi particolari di cui non ci occupiamo in questo corso, la probabilità di un preciso valore della variabile è infinitesimo, mentre si possono associare valori di probabilità (eventualmente il valore 0) a qualsiasi intervallo dell'asse reale su cui si definisce la variabile. Ciò si descrive tramite la funzione **densità di probabilità**, spesso chiamata anche **funzione di distribuzione**.

Data la variabile casuale x , definiamo la densità di probabilità $f(x)$ con le seguenti proprietà, per $-\infty < x < \infty$,

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
- $\text{Prob}(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$

Quindi la probabilità che la variabile casuale prenda valori compresi nell'intervallo (a,b) è dato dall'integrale della densità di probabilità della variabile nell'intervallo.

Come per una variabile casuale discreta, anche per una variabile casuale continua può definirsi il **valore atteso** o **valor medio** della variabile casuale. In questo caso si pone

$$(13.1) \quad \mu = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

data una funzione $g(x)$ della variabile casuale x , possiamo calcolare il valore atteso di $g(x)$ (detto **valor medio di $g(x)$**) come

$$(13.2) \quad E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx$$

Un caso particolare è $g(x) = (x - \mu)^2$, il cui valore atteso definisce la **varianza** della densità $f(x)$, detta anche varianza di insieme della variabile casuale x o varianza della distribuzione¹⁵

$$(13.3) \quad \sigma^2 \equiv Var[x] = E[(x - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

Si ha anche

$$(13.4) \quad \sigma^2 = E[x^2 - 2x\mu + \mu^2] = E[x^2] - 2\mu E[x] + \mu^2 = E[x^2] - \mu^2$$

Notiamo che esiste un'analogia meccanica per le distribuzioni di probabilità e i loro parametri: se la distribuzione di probabilità viene interpretata come la distribuzione di massa di un corpo (in una dimensione, ma il concetto è generalizzabile anche in tre dimensioni), allora il valor medio è il centro di massa e la varianza il momento d'inerzia rispetto ad esso. La (13.4) è l'analogo del teorema di Huygens-Steiner (vedi l'equazione (23.10)).

Se si ripete \mathbf{N} volte un esperimento probabilistico il cui risultato è descritto da una variabile casuale continua \mathbf{x} descritta da una densità di probabilità $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, si ottiene una successione di \mathbf{N} numeri reali $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$, (il "**campione**"), analogamente a quanto accade per il caso delle variabili discrete. Questi possono essere per esempio:

- a) Le altezze di un gruppo di ragazzi italiani di venti anni
- b) Le lunghezze di alcuni cilindretti prodotti da una fresa
- c) Gli errori casuali di misure ripetute, con alta sensibilità, di una certa grandezza

Tali numeri possono essere istogrammati usando una griglia uniforme¹⁶

$$(13.5) \quad g_i = g_{MIN} + i \cdot \Delta g$$

in modo da aumentare di 1 \mathbf{h}_i per ogni numero compreso tra \mathbf{g}_{i-1} e \mathbf{g}_i .

Il valore atteso di \mathbf{h}_i è

$$(13.6) \quad E[h_i] = N \cdot \int_{g_{i-1}}^{g_i} f(x) dx$$

Se si calcola la media e la varianza campionaria $\tilde{\sigma}^2$,

$$(13.7) \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

e

¹⁵ In statistica viene anche detta "varianza della popolazione"

¹⁶ Per semplicità. Si possono anche usare per gli istogrammi griglie non uniformi.

$$(13.8) \quad \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

vediamo che questi due valori, per la legge dei grandi numeri, tendono rispettivamente al valor medio μ e alla varianza d'insieme σ^2 .

Trasformazioni lineari per valor medio e deviazione standard

Analogamente a ciò che abbiamo fatto per media e deviazione standard campionaria, possiamo vedere come diventa il valor medio e la deviazione standard se trasformiamo linearmente una variabile casuale.

Sia x una variabile casuale con valor medio μ_x e deviazione standard σ_x . Costruiamo una nuova variabile

$$(13.9) \quad y = A \cdot x + B$$

Per la linearità dell'operatore $E[\cdot]$, è immediato verificare che la variabile y ha valor medio e deviazione standard

$$(13.10) \quad \mu_y = A \cdot \mu_x + B$$

e

$$(13.11) \quad \sigma_y = A \cdot \sigma_x$$

risultato ovviamente analogo a quello ottenuto per le grandezze campionarie nel capitolo 5.

Distribuzione cumulativa di una variabile casuale

Per descrivere una variabile casuale, talora, invece della densità di probabilità $f(x)$, si usa la funzione “**distribuzione cumulativa**” $F(x)$ definita come

$$(13.12) \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi = \text{Prob}[\text{variabile casuale} \leq x]$$

e si ha

$$(13.13) \quad \text{Prob}(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

La $F(x)$ è una funzione non decrescente di x . Per $x \rightarrow \infty$ si ha $F(x) \rightarrow 1$.

Nota la $F(x)$, possiamo ricavare la $f(x)$ come

$$(13.14) \quad f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Valor medio, mediana e moda

Esistono altri due parametri di posizione di una densità di probabilità, oltre al valor medio, che sono talora usati. Essi sono:

- la **mediana**, il valore m per cui $F(m) = \frac{1}{2}$, cioè il valore della variabile casuale per cui si ha esattamente la stessa probabilità che il risultato dell'esperimento probabilistico sia maggiore o inferiore ad essa. È ovvia l'analogia alla mediana introdotta del capitolo 5 come parametro di posizione per descrivere un insieme di dati.
- la **moda**, il valore per cui la densità di probabilità ha il massimo assoluto, cioè il valore verso cui più si addensano i risultati delle ripetizioni dell'esperimento probabilistico descritto da $f(x)$.

Momenti superiori: asimmetria e curtosi

Una densità di probabilità è in prima approssimazione descritta dai parametri μ e la varianza σ^2 che vengono anche detti rispettivamente **momento del primo ordine** e **momento centrale del secondo ordine**. Ulteriori parametri sono definiti a partire dai momenti centrali di ordine superiore

$$(13.15) \quad \mu^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k f(x) dx$$

dove k è l'ordine del momento. In particolare si definiscono i parametri **asimmetria** (**skewness** in inglese) e **curtosi** (**kurtosis** in inglese) come

$$(13.16) \quad \text{asimmetria} = \frac{\mu^{(3)}}{\sigma^3}$$

e

$$(13.17) \quad \text{curtosi} = \frac{\mu^{(4)}}{\sigma^4} - 3$$

Notare la normalizzazione per la relativa potenza della deviazione standard. L'asimmetria è 0 se la densità è simmetrica, è positiva se ha una coda più "pesante" a destra ed è negativa se la coda più pesante è a sinistra. La curtosi descrive la "pesantezza" delle code; il 3 a sottrarre serve per rendere più comodo il parametro: come vedremo questa scelta rende nulla la curtosi della distribuzione di Gauss, che assume quindi il carattere di distribuzione di riferimento.

Disuguaglianza di Chebyshev

Sappiamo che la deviazione standard descrive quanto una densità di probabilità è "stretta" intorno alla media. La disuguaglianza di Chebyshev dà a questa definizione qualitativa un carattere probabilistico quantitativo.

Per una variabile casuale \mathbf{x} con media μ e deviazione standard σ , si ha che

$$(13.18) \quad \text{Probabilità}(|x - \mu| \geq k \cdot \sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Ovviamente questa disuguaglianza ha senso per $k > 1$. Come vedremo, per le più comuni distribuzioni, $\text{Probabilità}(|x - \mu| \geq k \cdot \sigma)$ è molto minore di $\frac{1}{k^2}$.

La diseguaglianza di Cantelli¹⁷ collega il numero di deviazioni standard alla probabilità a singola coda:

$$(13.19) \quad \text{Probabilità}(x - \mu \geq k \cdot \sigma) \leq \frac{1}{1+k^2}$$

Somma di variabili casuali indipendenti

Se abbiamo due variabili casuali indipendenti (vedremo in seguito il significato rigoroso di questa parola) \mathbf{x} e \mathbf{y} , definite da due densità di probabilità $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{y})$, si dimostra che la loro somma $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ ha densità di probabilità $\mathbf{h}(\mathbf{z})$ data da

$$(13.20) \quad h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta)g(z-\zeta) d\zeta$$

Un risultato importante è che in questo caso si ha

$$(13.21) \quad E[z] = E[x] + E[y]$$

e

$$(13.22) \quad \text{Var}[z] = \text{Var}[x] + \text{Var}[y]$$

(la prima è vera anche se le variabili non sono indipendenti).

Questo è il più grande vantaggio di aver scelto la deviazione standard (che è la radice quadrata della varianza) come parametro di dispersione: che la somma di due variabili casuali indipendenti ha come varianza la somma delle varianze.

Questo risultato **vale anche per le variabili discrete** e può essere generalizzato al caso di \mathbf{N} variabili \mathbf{x}_i , ciascuna con deviazione standard σ_i , eventualmente con coefficienti \mathbf{a}_i .

Se $y = \sum_{i=1}^N a_i x_i$, si ha

$$(13.23) \quad \mu_y = E[y] = \sum_{i=1}^N a_i E[x_i]$$

$$(13.24) \quad \text{Var}[y] = \sum_{i=1}^N a_i^2 \sigma_i^2$$

¹⁷ Dal matematico italiano Francesco Paolo Cantelli (1875-1966).

$$(13.25) \quad \sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^N a_i^2 \sigma_i^2}$$

dove σ_y è la deviazione standard della somma y .

Vedremo come si modifica questo risultato nel caso di variabili non indipendenti. Si noti l'analogia con l'equazione del capitolo 7 per la propagazione delle incertezze nel caso di $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$.

Un caso particolare di combinazione lineare è la media, dove i coefficienti sono semplicemente $a_i = \frac{1}{N}$, per tutti gli i . In tal caso si vede che

$$(13.26) \quad \mu_y = \mu_x$$

e

$$(13.27) \quad \sigma_y = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

risultato che avevamo già anticipato.

Esempio di applicazione: supponiamo di lanciare 10 dadi e di sommarne i risultati, quale è il valor medio e la varianza di questa somma ?

La media e la varianza per il lancio di un dado sono (vedi capitolo 11) rispettivamente 3.5 e 35/12. Per la somma di 10 dadi quindi abbiamo valor medio 35 e varianza 350/12.

14 - Distribuzioni continue

- Distribuzione uniforme
- Distribuzione di Gauss
- Distribuzione normale standardizzata
- Approssimazione gaussiana
- Teorema del limite centrale
- Distribuzione del χ^2
- Distribuzione di Cauchy

Distribuzione uniforme (continua)

La distribuzione uniforme è definita come

$$(14.1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{per } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il valor medio è

$$(14.2) \quad \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b x \, dx = \left[\frac{x^2/2}{b-a} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2 \cdot (b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

i momenti centrali di ordine k sono

$$(14.3) \quad \mu^{(k)} = \frac{1}{b-a} \int_a^b (x-\mu)^k \, dx = \left[\frac{1}{(k+1)(b-a)} \cdot (x-\mu)^{k+1} \right]_a^b = \frac{(b-\mu)^{k+1} - (a-\mu)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1) \cdot (b-a)}$$

Si nota che per k dispari $\mu^{(k)} = 0$, mentre per k pari

$$(14.4) \quad \mu^{(k)} = \frac{(b-a)^k}{2^k \cdot (k+1)}$$

la varianza è quindi

$$(14.5) \quad \sigma^2 = \mu^{(2)} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

L'asimmetria è ovviamente nulla (la distribuzione è perfettamente simmetrica intorno al valor medio) e la curtosi è negativa, pari a $-\frac{6}{5}$, indicando code molto leggere (in questo caso sono nulle).

La distribuzione uniforme descrive l'**errore di lettura**, in particolare nel caso di strumenti digitali. Infatti si può supporre che la misura "vera" (il misurando) sia con eguale probabilità in qualsiasi punto dell'intervallo associato a un valore del display.

Talvolta la si associa a misure in cui è indicato l'errore massimo.

Distribuzione di Gauss

Laplace e Gauss dimostrarono, verso la fine del XVIII secolo, che se ci sono moltissime cause indipendenti, ciascuna delle quali altera di pochissimo il risultato di una misura, con eguale probabilità in eccesso e in difetto, l'errore di misura totale ha una densità di probabilità

$$(14.6) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

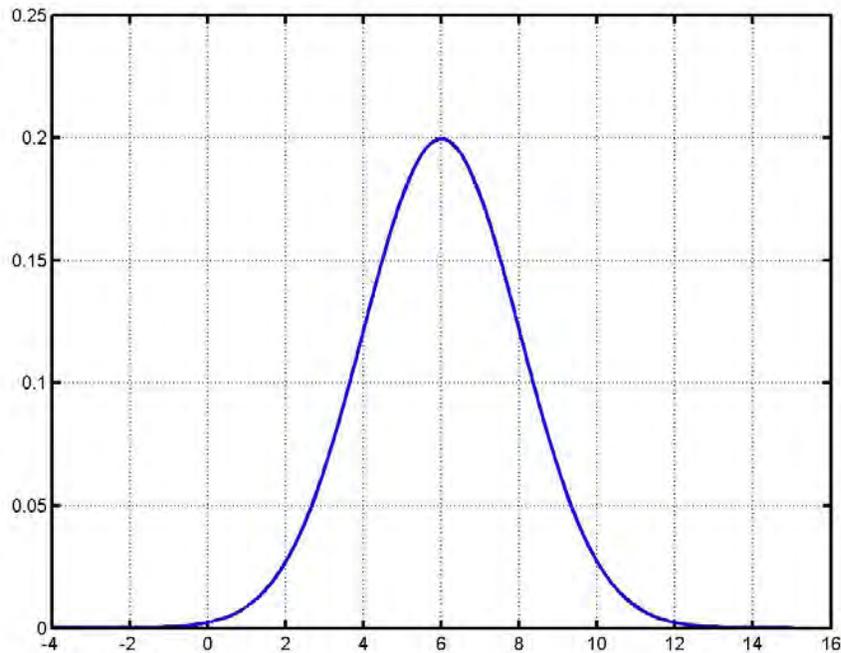
È questa una distribuzione di probabilità di forma a campana, simmetrica rispetto a $x = 0$, con varianza σ che viene denominata **distribuzione di Gauss** o **distribuzione normale**. Questa può generalizzarsi al caso in cui il valor medio non sia 0 come

$$(14.7) \quad f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = G(x; \mu, \sigma)$$

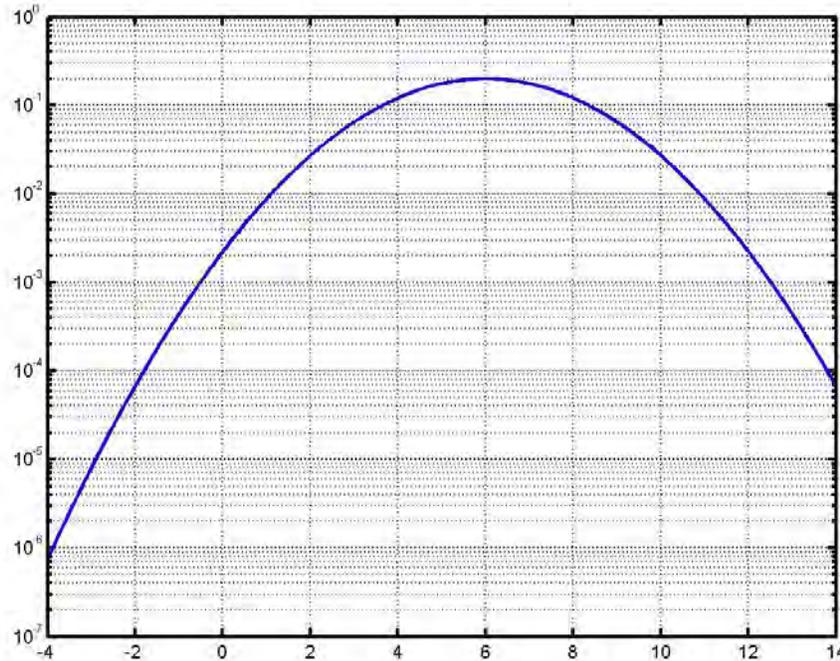
dove i parametri μ e σ sono il valor medio e la deviazione standard, che è anche la distanza tra l'asse di simmetria e ciascuno dei due punti di flesso.

I parametri di asimmetria e curtosi di una distribuzione gaussiana sono entrambi nulli.

Nella seguente figura è rappresentata una distribuzione gaussiana di valor medio 6 e deviazione standard 2.



La stessa funzione, in scala semilogaritmica appare come:



Si vede che ha, ovviamente, la semplice forma di una parabola.

La rappresentazione con l'ordinata logaritmica, per una distribuzione di probabilità o per un istogramma di dati sperimentali, è particolarmente utile quando si vogliono studiare le code.

La grande importanza della distribuzione di Gauss deriva dal teorema del limite centrale e dal fatto che alcune distribuzioni sono approssimabili da essa.

La difficoltà che sorge nell'uso di questa distribuzione è nel fatto che non esiste una forma analitica dell'integrale di $f(x)$ e quindi del calcolo della probabilità che la variabile casuale sia in un certo intervallo.

Per risolvere questo problema di calcolo si introduce la seguente funzione

$$(14.8) \quad \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = f(z; 0, 1)$$

detta **distribuzione normale standardizzata**, pari alla distribuzione normale con valor medio 0 e varianza 1. L'integrale di questa funzione, che non ha parametri, cioè la funzione di distribuzione cumulativa

$$(14.9) \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \varphi(\zeta) d\zeta$$

si trova tabulata in molti manuali di probabilità o statistica (vedi anche in appendice a questi appunti). Data la simmetria della distribuzione, le tavole in genere riportano solo i dati per $z \geq 0$; per ottenere i valori per $z < 0$, si ricordi che, per la simmetria,

$$(14.10) \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

Si può passare dalla nostra generica variabile normale x alla normale standardizzata z tramite la trasformazione

$$(14.11) \quad z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

e quindi il calcolo della probabilità che la variabile x sia nell'intervallo $x_1 \leftrightarrow x_2$,

$$(14.12) \quad \Pr(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

è pari a

$$(14.13) \quad \Pr(x_1 \leq x \leq x_2) = \Pr(z_1 \leq z \leq z_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$

dove

$$(14.14) \quad z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$$

Quindi, per calcolare la probabilità nell'intervallo $x_1 \leftrightarrow x_2$, occorre

- a) calcolare z_1 e z_2
- b) vedere nella tabella i valori di $\Phi(z_1)$ e $\Phi(z_2)$, usando la formula $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ nel caso di valori negativi di z
- c) fare la differenza tra i due valori ottenuti

È importante ricordare i valori dell'integrale della densità normale in alcuni casi particolari:

Intervallo	Probabilità
$-\sigma \leq x \leq \sigma$	0.6827
$-2\sigma \leq x \leq 2\sigma$	0.9545
$-3\sigma \leq x \leq 3\sigma$	0.9973
$-4\sigma \leq x \leq 4\sigma$	0.999936

Cioè risulta che la probabilità di avere valori superiori in valore assoluto a una deviazione standard è minore di 1/3, di due deviazioni standard è minore di 0.05, di tre è minore di 0.003 e di quattro minore di 0.0007. Si noti la rapidità con cui diminuisce la probabilità di allontanamento dalla media.

È comoda anche la seguente tabella:

Probabilità	Intervallo simmetrico in σ
0.5	0.67
0.90	1.64
0.95	1.96
0.99	2.58
0.999	3.29

Diamo ora alcuni esercizi che si risolvono con l'uso delle tavole della distribuzione gaussiana.

1. **Supponiamo di avere delle misure di una lunghezza di valore vero 23 m affette da un errore casuale distribuito normalmente con deviazione standard di 0.09 m. Quale è la probabilità che effettuando 20 misure e facendone la media si abbia un valore maggiore di 23.05 m ?**

La deviazione standard sulla media è $\sigma_{media} = \frac{0.09}{\sqrt{20}} m \approx 0.02012$. Il valore 23.05 corrisponde a

$z \approx \frac{23.05 - 23}{0.02012} \approx 2.48$. Nella tabella in fondo agli appunti (che riporta la distribuzione

cumulativa), al valore 2.48 troviamo 0.993431, quindi il valore cercato è $1 - 0.993431 \approx 0.0066$.
Attenzione ! Non sempre le tavole indicano la distribuzione cumulativa, quindi regolarsi di conseguenza.

2. **Osserviamo a lungo un segnale che sappiamo essere distribuito gaussianamente. Troviamo che nel 10% del tempo supera il valore 10 e nell'1% del tempo supera il valore 12. Quale è il valor medio e la deviazione standard del segnale ?**

Dalle tavole ricaviamo che la cumulativa vale 0.9 per 1.28σ e 0.99 per 2.33σ . Possiamo quindi scrivere il seguente sistema

$$\begin{cases} \mu + 1.28 \sigma = 10 \\ \mu + 2.33 \sigma = 12 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \sigma = \frac{12-10}{2.33-1.28} = \frac{2}{1.05} \approx 1.90 \\ \mu = 10 - 1.28 \sigma = 10 - 1.28 \cdot 1.90 = 10 - 2.43 = 7.56 \end{cases}$$

Approssimazione gaussiana

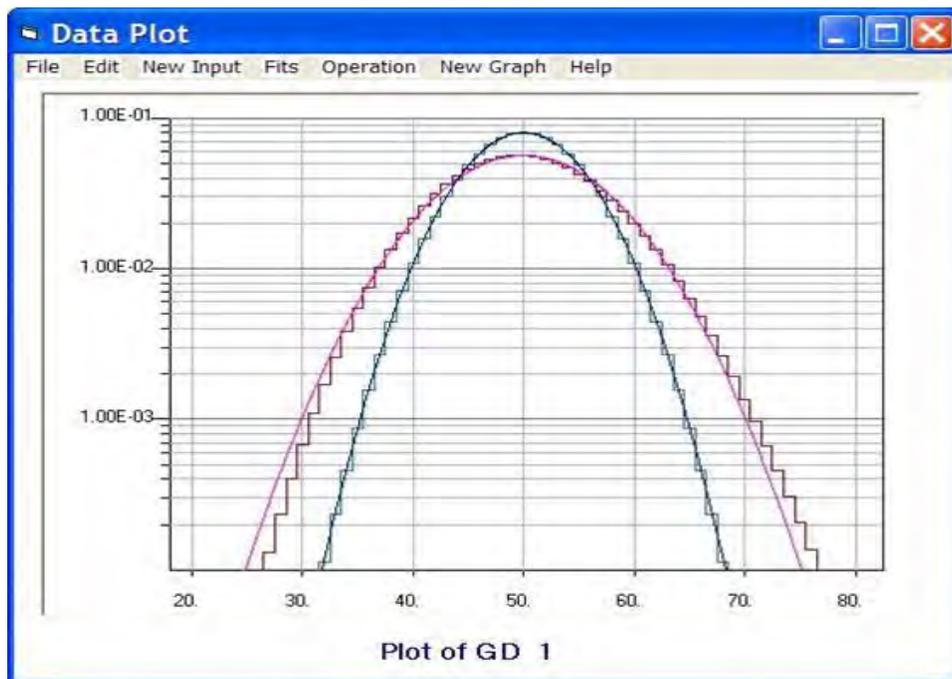
Laplace e de Moivre hanno dimostrato che, per valori alti di N, la distribuzione binomiale è approssimata dalla seguente gaussiana

$$(14.15) \quad \begin{aligned} P(k; N, p) &= \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \approx \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot Np(1-p)}} e^{-\frac{(k-Np)^2}{2Np(1-p)}} = G(k; Np, \sqrt{Np(1-p)}) \end{aligned}$$

cioè una gaussiana che ha la stessa media e la stessa varianza della binomiale.

Una analoga approssimazione vale per la distribuzione di Poisson, approssimabile per alti valori di μ (> 20), con una distribuzione gaussiana con media e varianza pari a μ .

In figura sono mostrate le approssimazioni gaussiane per la binomiale con parametri $N = 100$, $p = 0.5$ e (in rosso) per la poissoniana con $\mu = 50$.



Vediamo con un problema un uso dell'approssimazione gaussiana.

Quale è la probabilità che lanciando 6000 volte un dado (onesto) si abbia almeno 1100 volte il 6 ?

La soluzione esatta è

$$P = \sum_{k=1100}^{6000} \binom{6000}{k} \frac{5^{6000-k}}{6^{6000}}$$

non è praticabile (si provi a calcolare soltanto 6^{6000}). Sappiamo però che la distribuzione binomiale è approssimabile con una gaussiana con media $\mu = 6000 \cdot \frac{1}{6} = 1000$ e deviazione standard $\sigma = \sqrt{6000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 28.86$. Quindi semplicemente calcoliamo l'integrale della gaussiana da 1100 a 6000 (che è in pratica equivalente all'integrale da 1100 e infinito). Passando alla variabile z , detta anche in questo caso **rapporto critico**, si ha

$$z = \frac{1100 - 1000}{28.86} = \frac{100}{28.86} \approx 3.46$$

e quindi dalle tabelle si ha $P = 0.00027$.

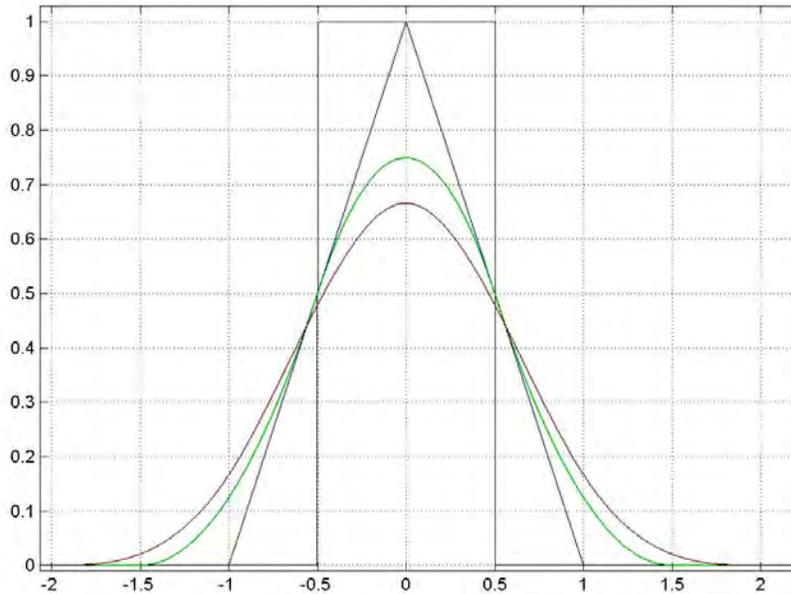
Teorema del limite centrale

La grande importanza della distribuzione normale è dovuta al **teorema del limite centrale**. Con esso si dimostra che, **se sommiamo N variabili casuali indipendenti, con distribuzioni anche diverse, ma con varianze dello stesso ordine di grandezza, se N tende all'infinito, la distribuzione della somma tende a una distribuzione gaussiana che ha valor medio la somma dei valor medi e varianza la somma delle varianze.**

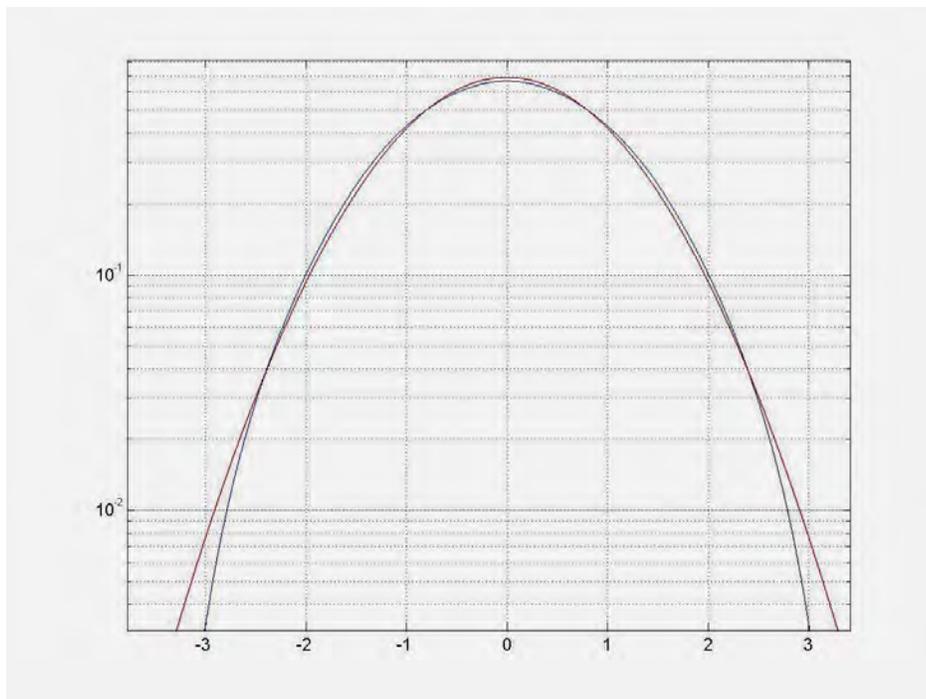
Se quindi il valore di una misura è influenzato dalla somma di tante cause indipendenti di disturbo, ciascuna delle quali ha un'ampiezza casuale (con qualsiasi legge) ed ha un effetto che si somma a quello di tutte le altre, ne deriva un errore di misura con andamento gaussiano.

Un simile meccanismo può trovarsi in tanti fenomeni naturali, per esempio la massa dei granelli di sabbia di una spiaggia, l'altezza dei ventenni maschi di una certa città, ...

Per capire come funziona questo meccanismo, mostriamo il seguente grafico, in cui sono riportate le distribuzioni della distribuzione uniforme e della somma di 2, 3, 4 variabili uniformi indipendenti.



Si noti che la somma di 2 variabili uniformi dà una distribuzione triangolare, mentre sommandone di più la distribuzione appare a campana. Nella figura seguente viene presentata la differenza tra la distribuzione della somma di 5 variabili uniformi e una vera distribuzione normale (con stessa media e varianza; la gaussiana è in rosso). Si noti che la differenza è sulle code. (Le ascisse sono in unità di σ).



Un'importante corollario del teorema del limite centrale è che la somma di un qualsiasi numero di variabili gaussiane indipendenti ha una distribuzione gaussiana, con valor medio la somma dei valori medi e varianza la somma delle varianze.

Si noti che se le variabili non sono indipendenti, il corollario non è valido. Sia per esempio x una variabile gaussiana con valor medio μ e deviazione standard σ ; sia y una variabile pari a $-x$: y è quindi anch'essa gaussiana, con valor medio $-\mu$ e deviazione standard σ e ovviamente dipendente da x . La somma delle due variabili x e y ha correttamente come valor medio la somma dei due valori medi, cioè 0, ma la varianza è nulla.

Come esercizio consideriamo il dado del paragrafo precedente. Anche questa volta facciamo 6000 lanci, però, invece di considerare il numero di volte che si è presentato il 6, consideriamo la somma di tutti i 6000 risultati. Supponiamo che anche questa volta il 6 sia uscito 1100 volte, mentre gli altri 4900 risultati si siano distribuiti equamente per gli altri 5 valori.

Il risultato della somma sarà allora:

$$1100 \cdot 6 + \frac{1+2+3+4+5}{5} \cdot 4900 = 21300$$

Per un dado "onesto" ci aspettiamo

$$\mu = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} \cdot 6000 = 3.5 \cdot 6000 = 21000$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{35}{12}} \cdot 6000 \approx 132$$

quindi lo scarto è $s = 21300 - 21000 = 300$ e il rapporto critico è

$$z = \frac{s}{\sigma} \approx \frac{300}{132} \approx 2.27$$

Si noti che questo risultato è diverso (e inferiore) a quello ottenuto "testando" il numero di 6.

Distribuzione del χ^2

Se si sommano i quadrati di N variabili normali standardizzate, si ottiene una variabile casuale che chiamiamo χ^2 e che ha la densità

$$(14.16) \quad f(\chi^2; N) = \frac{1}{2^{N/2} \Gamma(N/2)} (\chi^2)^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

dove la Γ è una complessa funzione matematica che vale

$$(14.17) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \text{e} \quad \Gamma(1) = 1$$

e per n intero positivo

$$(14.18) \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}$$

e

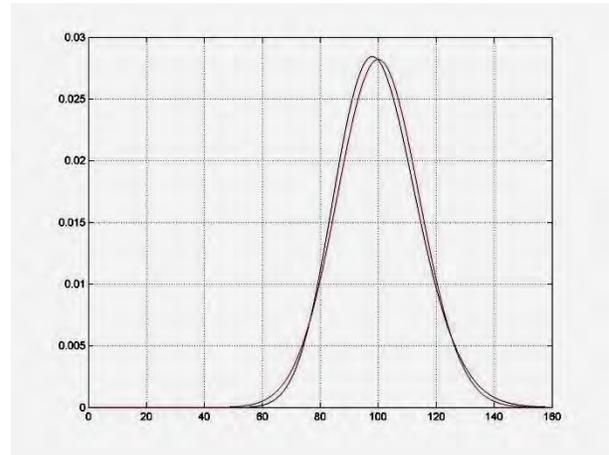
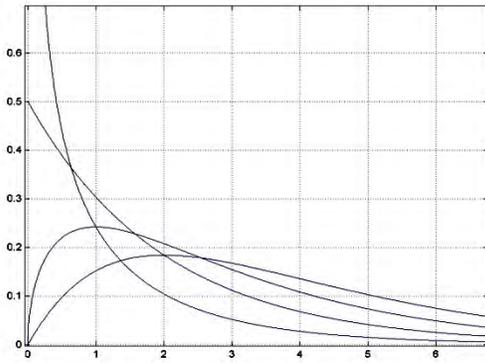
$$(14.19) \quad \Gamma(n+1) = n!$$

Il parametro \mathbf{N} è detto "numero di gradi di libertà". Per $N < 3$ la distribuzione, definita solo per x non negativo, è monotona decrescente, altrimenti ha un massimo in $N-2$.

Il valore atteso e la varianza sono rispettivamente \mathbf{N} e $2\mathbf{N}$; il terzo e quarto momento centrale sono $\mu_3 = 8N$ e $\mu_4 = 12 \cdot N \cdot (N+4)$. L'asimmetria è $2\sqrt{\frac{2}{N}}$ e la curtosi è $\frac{12}{N}$.

Questa distribuzione sarà usata nel cosiddetto test del χ^2 (vedi capitolo 16).

Nella prima figura ci sono le distribuzioni del χ^2 per $N = 1, 2, 3, 4$. Nella seconda sono confrontate la distribuzione del χ^2 con $N = 100$ e la gaussiana con la stessa media e la stessa varianza (in rosso la gaussiana).



Distribuzione di Cauchy

La distribuzione di Cauchy, nota in Fisica anche col nome di distribuzione di Breit-Wigner o di Lorentz, ha la densità

$$(14.20) \quad f(x; \mu, d) = \frac{1}{\pi d} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x - \mu}{d}\right)^2}$$

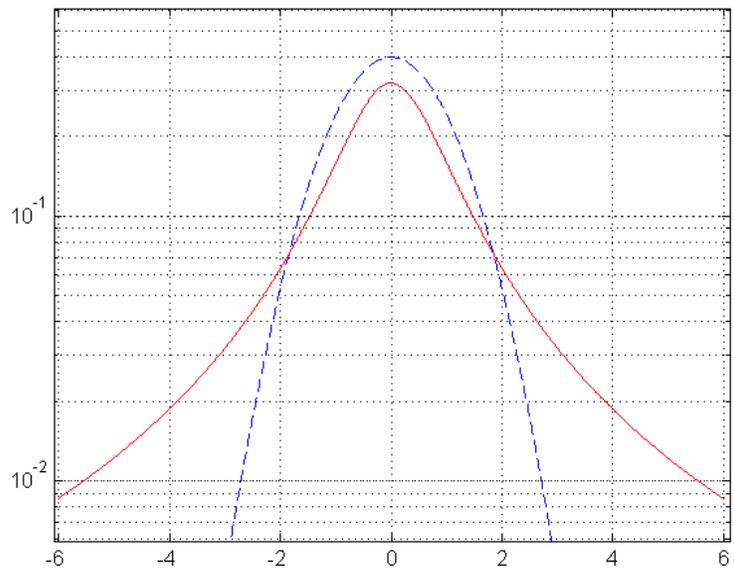
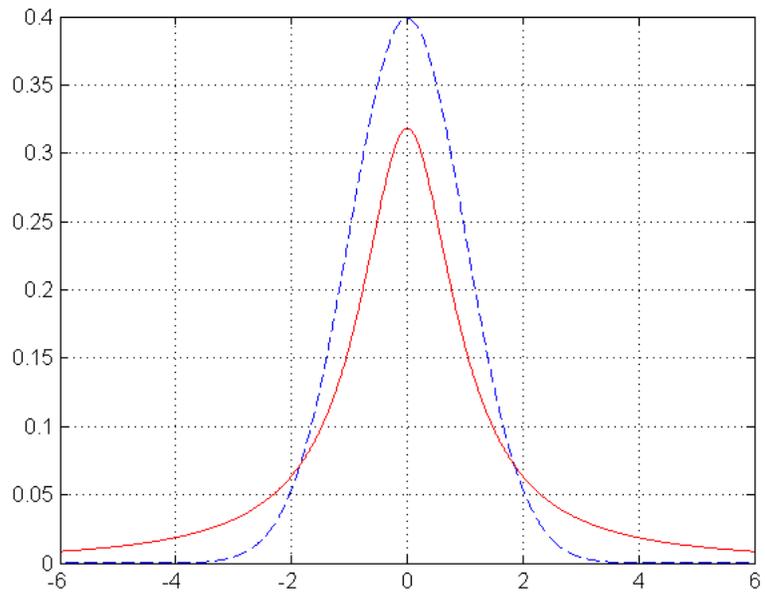
È caratterizzata da code molto pesanti e dal fatto che non ha varianza (l'integrale è divergente).

Un esempio di esperimento i cui risultati sono distribuiti secondo la distribuzione di Cauchy è il seguente. Si faccia ruotare un disco in modo che si fermi a caso con distribuzione dell'angolo uniforme tra 0 e 360 gradi. La tangente di questo angolo è distribuita secondo Cauchy, con media 0 e parametro $d = 1$.

Un altro caso in cui appare la distribuzione di Cauchy è quando facciamo il rapporto di due variabili gaussiane a media nulla, con eguale varianza. Anche in questo caso si ha media 0 e parametro $d = 1$.

Se si cerca di fare la media di un campione estratto da una distribuzione di Cauchy, si trova che comunque si fa crescere della dimensione del campione, la media non converge al valor medio. Infatti non esistendo la varianza, il teorema di Chebyshev non funziona.

In figura è riportata la distribuzione di Cauchy (in rosso) con valor medio nullo e $d = 1$, in confronto con la normale standardizzata (tratteggiata, in blu), in scala lineare e semilog. Si noti la differente “pesantezza” delle code.



15 - Variabili casuali multiple (cenno)

- Densità di probabilità per variabili multiple
- Densità marginali e indipendenza stocastica
- Covarianza
- Coefficiente di correlazione
- Distribuzione gaussiana bivariata
- Scatter plot

Abbiamo introdotto il concetto di variabile casuale per descrivere una "popolazione" di oggetti identificabile per una caratteristica numerica. Per esempio, l'altezza dei giovani di leva, la massa delle stelle di un certo tipo, ecc.. Spesso però le caratteristiche interessanti degli oggetti in studio sono due o più, ciascuna espressa da una variabile numerica e può essere di interesse lo studio interrelato di queste caratteristiche. Per esempio, l'altezza e la lunghezza del piede dei giovani di leva, la massa e la luminosità delle stelle di un certo tipo, eccetera.

In questi casi si definisce una variabile casuale per ciascuna caratteristica e si dice che si ha a che fare con **variabili casuali multiple**.

Le variabili casuali multiple possono essere discrete e continue, e, analogamente alle variabili casuali semplici, ad esse è associata:

- (caso discreto) una probabilità per ogni combinazione dei possibili valori delle n variabili; la somma delle probabilità di tutte le combinazioni è 1

$$(15.1) \quad \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} p_{i_1 i_2 \dots i_n} = 1$$

- (caso continuo) una densità di probabilità $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, il cui integrale, su tutte le n variabili, è 1

$$(15.2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$$

In questo breve cenno ci riferiremo solo al caso continuo.

Valori aspettati

Analogamente al caso di una singola variabile, si può definire il valore aspettato di una qualsiasi funzione g delle n variabili come

$$(15.3) \quad E[g(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Prendiamo il semplice caso in cui la funzione \mathbf{g} sia la combinazione lineare di tutte le variabili \mathbf{x}_i ,

$$(15.4) \quad y = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

si ha

$$(15.5) \quad E[y] = E\left[\sum_{i=1}^n a_i x_i\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_i x_i \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \sum_{i=1}^n a_i E[x_i]$$

quindi il valore aspettato della combinazione lineare di n variabili casuali (anche non indipendenti) è pari alla stessa combinazione lineare dei valori aspettati (come potevamo intuire, data la linearità dell'operatore $E[\cdot]$ "valore aspettato").

Densità marginali e indipendenza stocastica

Consideriamo per semplicità il caso in cui n sia eguale a 2 e chiamiamo x e y le due variabili. Definiamo "**densità marginali**" le funzioni

$$(15.6) \quad f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

e

$$(15.7) \quad f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

Queste due funzioni sono due densità di probabilità che possono vedersi come le densità di probabilità associate alle due variabili x e y, indipendentemente l'una dall'altra; cioè, per esempio, la prima descrive le qualità statistiche della variabile x, se non si sa niente di y.

Diciamo che due variabili x e y sono **stocasticamente indipendenti** (o, semplicemente, **indipendenti**) se tutta l'informazione su x è contenuta nella marginale \mathbf{f}_x e tutta l'informazione su y nella marginale \mathbf{f}_y , ovvero se conoscere y non dà nessuna informazione su x e viceversa.

Se le due variabili casuali x e y sono indipendenti, si ha

$$(15.8) \quad f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

È immediato verificare che

$$(15.9) \quad E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x) dx$$

e analogamente

$$(15.10) \quad E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_y(y) dy$$

Vediamo ora il valore aspettato del prodotto. In generale

$$(15.11) \quad E[x \cdot y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f(x, y) dx dy$$

Se x e y sono indipendenti, si ha

$$(15.12) \quad E[x \cdot y] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_y(y) dy = E[x] \cdot E[y]$$

Covarianza

Torniamo ora alla combinazione lineare $y = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Siano $\mu_i = E[x_i]$ e σ_i^2 le varianze delle n variabili \mathbf{x}_i . Abbiamo visto che $\mu_y = E[y] = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i$. Sviluppriamo ora l'espressione della varianza di y . Si ha

$$(15.13) \quad \begin{aligned} \sigma_y^2 &= E \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i (x_i - \mu_i) \right)^2 \right] = \\ &= E \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j (x_i - \mu_i) (x_j - \mu_j) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j E \left[(x_i - \mu_i) (x_j - \mu_j) \right] \end{aligned}$$

Indichiamo ora col termine **covarianza** delle variabili \mathbf{x}_i e \mathbf{x}_j il valore

$$(15.14) \quad \sigma_{ij} = E[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)] = E[x_i x_j] - \mu_i \mu_j$$

Si noti che $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$. È immediato dimostrare che se \mathbf{x}_i e \mathbf{x}_j sono indipendenti la loro covarianza è nulla; altrimenti può essere positiva o negativa.

Se quindi le n variabili \mathbf{x}_i sono indipendenti, la varianza della combinazione lineare si riduce a

$$(15.15) \quad \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2$$

da questa equazione si ricava, per esempio, la regola sulla deviazione standard della media di misure indipendenti

$$(15.16) \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Tutte le covarianze delle n variabili \mathbf{x}_i formano una matrice quadrata

$$(15.17) \quad \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

detta **matrice di covarianza**; sulla diagonale ha le varianze delle n variabili. Se le \mathbf{x}_i sono indipendenti, la matrice è diagonale.

Possiamo quindi esprimere la varianza di y come

$$(15.18) \quad \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \sigma_{ij}$$

Se le \mathbf{x}_i sono indipendenti, otteniamo il risultato, già anticipato,

$$(15.19) \quad \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2$$

È proprio da questo risultato che si deduce la regola della somma quadratica per la propagazione delle incertezze data nel capitolo 7

$$(15.20) \quad \Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 \Delta x_i^2}$$

in cui le incertezze Δx_i e Δy sono assimilate alle deviazioni standard σ_i e σ_y (f in questo caso è la funzione che definisce la misura indiretta y).

Se gli errori di misura sulle grandezze \mathbf{x}_i non sono indipendenti, la propagazione dell'incertezza, assimilata ad una deviazione standard, è data dall'espressione più generale

$$(15.21) \quad \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \sigma_{ij}$$

La covarianza tra due variabili x e y, data da

$$(15.22) \quad \sigma_{x,y} = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)]$$

indica una dipendenza tra le due variabili.

Si noti tuttavia che la condizione $\sigma_{x,y} = 0$ è condizione necessaria, ma non sufficiente per l'indipendenza delle due variabili. Per illustrare il caso di due variabili scorrelate, ma non indipendenti, si consideri le seguenti due variabili casuali:

1. \mathbf{x} una qualsiasi variabile casuale, comunque distribuita, per semplicità a media nulla
2. \mathbf{y} una variabile casuale che ha probabilità 0.5 di valere x e 0.5 di valere $-x$

y è evidentemente dipendente da x ed anch'essa a media nulla, ma

$$\sigma_{xy} = E[x \cdot y] = \frac{1}{2} \cdot E[x^2] - \frac{1}{2} \cdot E[x^2] = 0.$$

Come da un campione di dati \mathbf{x}_i estratti da una popolazione possiamo calcolare la varianza campionaria, così da un campione di coppie $\{ \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \}$ possiamo calcolare la **covarianza campionaria**

$$(15.23) \quad \tilde{\sigma}_{x,y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Coefficiente di correlazione

Il valore della covarianza σ_{xy} dipende anche dalle varianze di x e y. Per indicare questo tipo di dipendenza in una forma indipendente dalla varianza di x e y (e da eventuali fattori di amplificazione), si è introdotto un parametro adimensionale, il **coefficiente di correlazione**

$$(15.24) \quad \rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Questo è un numero compreso tra -1 e 1.

Una caratteristica importante è che, se definiamo due nuove variabili $\xi = a \cdot x + b$ e $\eta = c \cdot y + d$, per qualsiasi valore di a, b, c e d (purché a e c siano diversi da 0), il coefficiente di correlazione tra le due nuove variabili ξ e η è eguale a quello tra x e y.

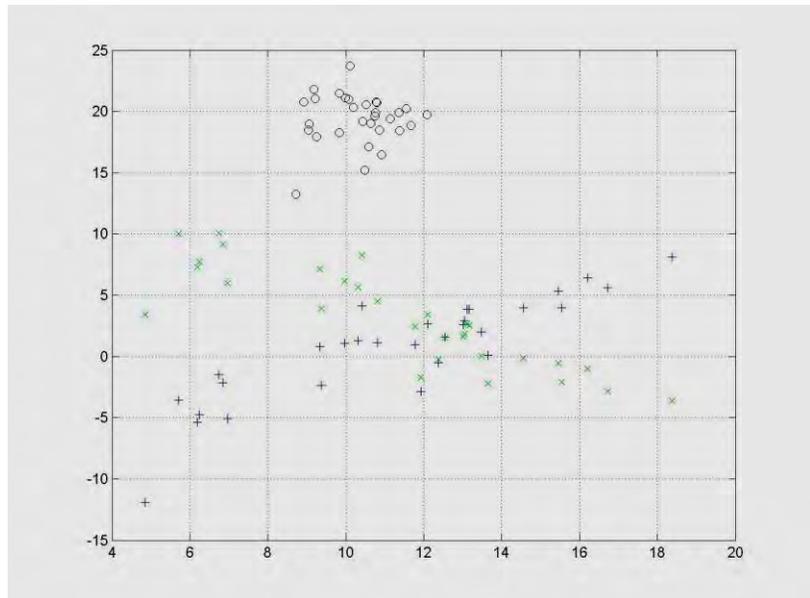
Il coefficiente di correlazione evidenzia una **relazione lineare** tra le variazioni percentuali della variabile x e le variazioni percentuali della variabile y.

Se il coefficiente di correlazione è 1 o -1, la relazione lineare tra le due variabili è deterministica e si può ricavare l'una dall'altra, anche se ciascuna può vedersi come una variabile casuale. Per esempio, si abbia una popolazione di rondelle di ferro, perfette, di varie dimensioni, con il diametro **d** distribuito secondo una gaussiana di valor medio 15 mm e deviazione standard 2 mm. La circonferenza **c** sarà anch'essa una variabile casuale gaussiana con valor medio $30 \cdot \pi$ e deviazione standard $4 \cdot \pi$. Le rondelle possono essere descritte da questi 2 caratteri d e c, ma la correlazione tra essi è 1, quindi ne basta uno per ricavare l'altro con assoluta precisione.

A partire da un campione di coppie $\{ \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \}$ si può calcolare il coefficiente di correlazione campionario, usando la covarianza campionaria e le deviazioni standard campionarie, come

$$(15.25) \quad \tilde{\rho} = \frac{\tilde{\sigma}_{xy}}{\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y}$$

In figura sono riportati tre campioni di coppie di dati, tratte da tre diverse popolazioni. I dati indicati con i "+" blu hanno coefficiente di correlazione positivo (circa 0.87), quelli indicati con gli "x" verdi lo hanno negativo (circa -0.87) e quelli indicati con gli "o" neri sono scorrelati (anche se, a causa di fluttuazioni casuali, quelli qui rappresentati presentano un



piccolo coefficiente di correlazione di circa 0.04).

Distribuzione gaussiana bivariata

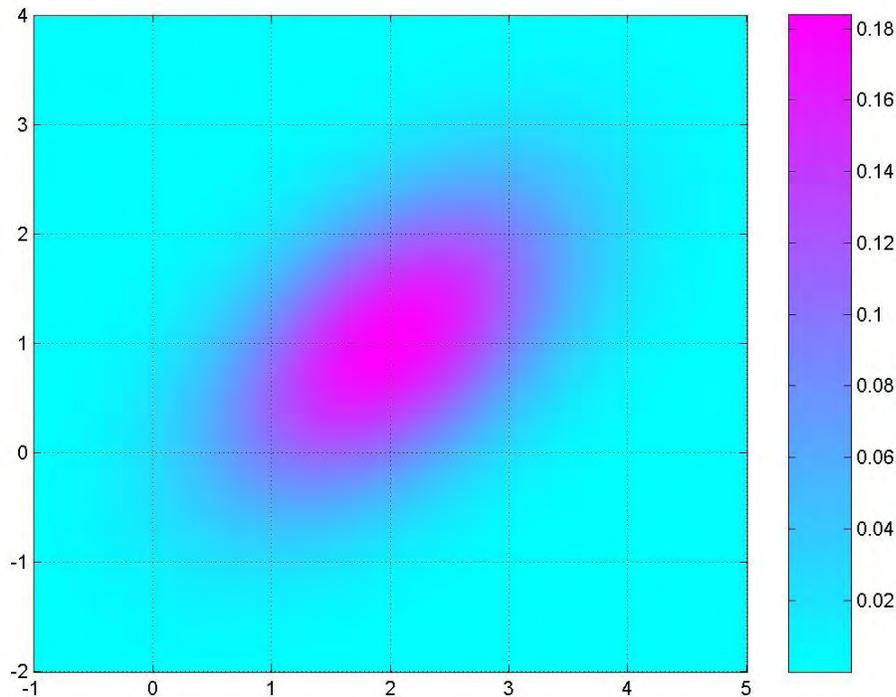
Come esempio di distribuzione di più variabili diamo il caso della distribuzione normale in due variabili, la cui densità di probabilità è

(15.26)

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right)\right]$$

espressa in funzione dei parametri μ e σ delle due variabili e del coefficiente di correlazione ρ tra di esse.

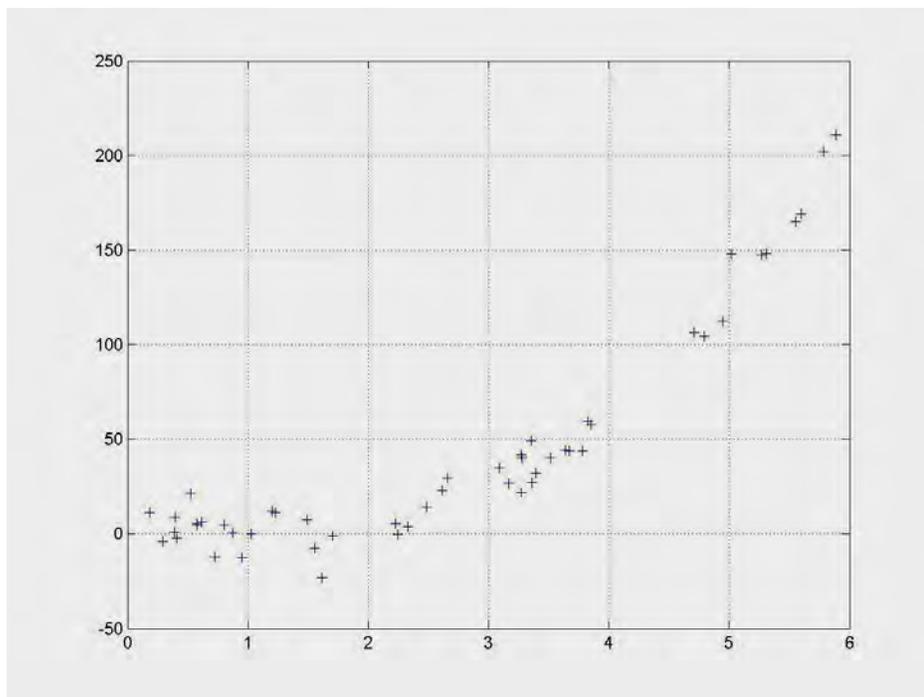
In figura è mostrata (in pianta) una distribuzione gaussiana bivariata, rappresentante la distribuzione della statura (x) e della lunghezza del piede (y) in una popolazione. È evidente la correlazione.



"Scatter plot"

Quando si ha a che fare con due caratteri di una popolazione, l'uso di diagrammi come il precedente, chiamato **scatter plot**, può essere molto proficuo e più ricco di informazioni del semplice coefficiente di correlazione.

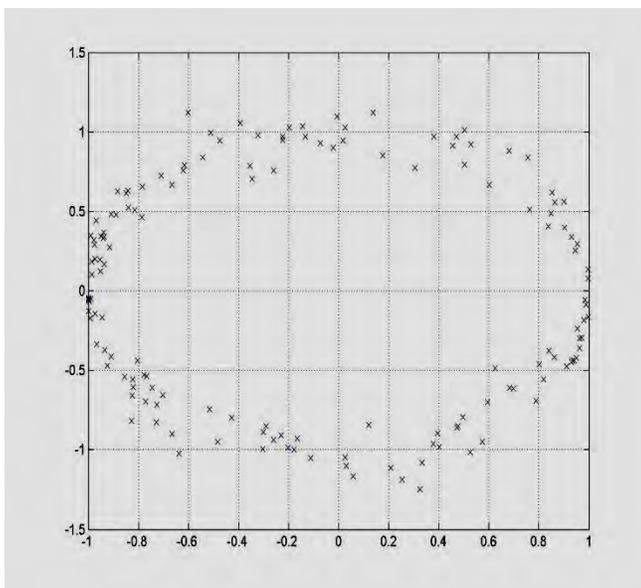
Per esempio nel seguente grafico¹⁸, c'è un'evidente relazione tra la x e la y (una cubica), ma non lineare. I dati tuttavia risultano correlati lo stesso.



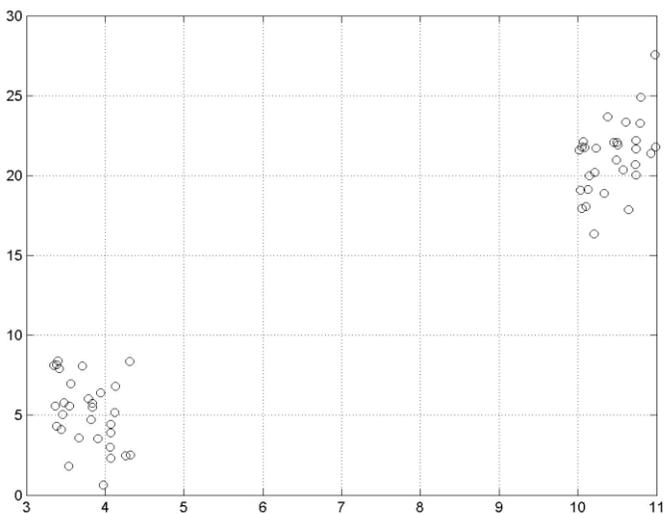
In questo caso si possono mettere a punto metodi di calcolo più complessi della valutazione campionaria del coefficiente di correlazione per descrivere questa più complessa dipendenza.

Nella seguente figura invece, sebbene ci sia un'evidente relazione tra le x e le y, quindi x e y non sono indipendenti, il coefficiente di correlazione è nullo (si può vedere che in certe zone è positivo, in altre negativo, ma in totale è nullo).

¹⁸ I grafici di questo paragrafo rappresentano una coppia di caratteri del campione, ovviamente non indipendenti. Ogni punto indica una "estrazione", cioè un elemento del campione che ha x come valore del primo carattere e y come valore del secondo. I caratteri qui considerati sono del tutto arbitrari.



In quest'ultima figura, infine, vediamo che sebbene ci sia una forte correlazione tra l'insieme dei dati, in effetti essi sono tratti molto probabilmente da due popolazioni ben distinte (all'interno delle quali è molto ridotta se non nulla la correlazione tra i due caratteri). Lo scatter plot evidenzia chiaramente questa situazione.



16 - Stima di parametri

- L'inferenza statistica
- Esperimenti controllati ed esperimenti osservativi
- Stima del valor medio
- Livello di fiducia e intervallo di fiducia
- Stima della varianza
- Stima dei parametri di una retta sperimentale
- Media pesata

Cenno all'inferenza statistica

L'inferenza è il processo con cui, a partire da dati sperimentali, valutiamo (“**stimiamo**”) il valore di uno o più parametri di nostro interesse, oppure **decidiamo** sulla correttezza di certe ipotesi. Se i dati sperimentali sono estratti come campione da una popolazione o se essi sono affetti da errori casuali, parliamo di inferenza statistica.

Nelle scienze sperimentali esistono due distinte procedure sperimentali:

- gli **esperimenti controllati** (o “di laboratorio”; qualcuno li chiama “galileiani”), in cui decidiamo alcuni parametri sperimentali e ne misuriamo altri. Per esempio nell'esperimento della molla, per calcolare la costante elastica **k** abbiamo deciso i valori di massa con cui caricavamo la molla e misuravamo il periodo. In questo caso usiamo l'inferenza statistica a causa delle incertezze di misura.
- gli **esperimenti osservativi**, in cui gli oggetti della sperimentazione non sono sotto il nostro controllo e quindi noi possiamo limitarci a misurarne (“osservarne”) caratteristiche “campionarie” ed inferire leggi tra di esse. È questo per esempio il caso dell'astrofisica (c'è qualche difficoltà a portare in laboratorio una stella e a controllarne qualche caratteristica, per esempio la massa). In questo caso usiamo l'inferenza statistica sia perché operiamo su un campione di una popolazione, sia perché sono presenti incertezze di misura, sia perché ci può essere l'influenza di altri fattori non sotto il nostro controllo).

In generale, supponiamo di dover stimare un parametro θ da un campione sperimentale $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, ottenendo la **stima** $\hat{\theta}$ (d'ora in poi indicheremo con la cuspide “^” il valore “stimato” di un parametro). Realizziamo ciò tramite una funzione f ¹⁹

$$(16.1) \quad \hat{\theta} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

In linea di principio, la funzione f può essere qualsiasi: il problema è avere un buon “stimatore” (ancora meglio, lo stimatore “ottimo”).

¹⁹ Una qualsiasi funzione del campione viene chiamata in Inglese "Statistic" (singolare; la "Statistica" (scienza) viene chiamata "Statistics").

Il valore stimato $\hat{\theta}$ può essere visto come una variabile casuale. Alcune “qualità” auspicabili di uno stimatore sono le seguenti:

- la **consistenza**, cioè se, al tendere ad infinito della dimensione n del campione, il valore della stima tende al valore del parametro. Questa è, ovviamente, una qualità fondamentale.
- la **correttezza**, o assenza di **distorsione** (bias in inglese), se $E[\hat{\theta}] = \theta$.
- l'**efficienza**, cioè quanto rapidamente $\hat{\theta}$ converge a θ al crescere di n .
- la **robustezza**, cioè quanto le qualità di uno stimatore sono indipendenti dalla distribuzione dei dati a cui è applicato.

Per “costruire” buoni stimatori si utilizzano vari metodi, per esempio il **metodo dei minimi quadrati**, il **metodo della massima verosimiglianza** o il **metodo dei momenti**.

Stima del valor medio

Supponiamo di dover eseguire la misura di una grandezza fisica. Facciamo ciò eseguendo una certa procedura sperimentale e la ripetiamo più volte. Partendo dai risultati di queste operazioni ripetute, ci possiamo chiedere:

- quale è il valore vero della misura della grandezza in esame ?
- quale è l'incertezza del valore che forniamo ?
- quale è l'intervallo di fiducia, cioè l'intervallo, relativo ad una certa probabilità, che possiamo dire contenga il valore vero, con quella probabilità ?

Sin dall'inizio del corso abbiamo proposto come buon stimatore del "valore vero" di un misurando (in linguaggio statistico, il "valore aspettato"), in presenza di errori casuali, la media dei risultati di successive misure. Ora possiamo chiederci: è questo un buon stimatore ?

Verifichiamone la correttezza:

$$(16.2) \quad E[\bar{x}] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[x_i] = \mu$$

quindi, come speravamo è corretto (e quindi anche consistente). Non discutiamo qui altre qualità (alcune delle quali dipendono dalla distribuzione degli errori casuali, che non è detto che siano sempre gaussiani).

Abbiamo già ricavato l'incertezza sulla media che, se la rappresentiamo con la deviazione standard, è $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$.

Se stabiliamo una probabilità φ , che chiamiamo il **livello di fiducia** o **livello di confidenza**, quale è, a partire dalle nostre misure, l'intervallo **(a,b)** (detto **intervallo di confidenza**) entro cui sta il valore vero ?

Supponiamo che i nostri errori siano gaussiani e che conosciamo la loro deviazione standard σ_x . Allora, trovato con le tavole il valore **z** della variabile standardizzata che corrisponde ad un intervallo simmetrico di probabilità φ , diciamo che l'intervallo relativo al livello di fiducia φ è

$$(16.3) \quad (\bar{x} - z \cdot \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + z \cdot \sigma_{\bar{x}})$$

Nel caso che la distribuzione non sia gaussiana, se il numero di misure è abbastanza elevato, per il teorema del limite centrale questa formula è una buona approssimazione.

Se la deviazione standard non è nota, la si può stimare (si veda il prossimo paragrafo), ma in questo caso il calcolo dell'intervallo di fiducia è più complesso (occorre introdurre la distribuzione *t* di Student, è questa una distribuzione con un parametro detto numero dei gradi di libertà, che "parte" da quella di Cauchy e "arriva" asintoticamente a quella di Gauss); tuttavia, se il campione è abbastanza numeroso la formula che abbiamo dato è una buona approssimazione. Discuteremo di questo argomento nel prossimo paragrafo);

Una volta stimato l'intervallo di confidenza (dato un livello di fiducia di nostra scelta), possiamo decidere se i nostri risultati sperimentali sono compatibili con una aspettativa teorica (a priori). Se il valore teorico è entro l'intervallo di fiducia, allora diciamo che le nostre misure sono compatibili con esso, o anche che l'esperimento conferma la teoria, altrimenti lo dobbiamo escludere (e dobbiamo cambiare teoria o correggere errori sperimentali; c'è anche l'eventualità che siamo di fronte a una fluttuazione statistica: in questo caso se ripetiamo l'esperimento dovremmo avere risultati compatibili).

Nota: Il livello di fiducia indica quanto siamo al sicuro da inevitabili fluttuazioni. Porre il livello di fiducia p per esempio a **0.95** significa che questa è la probabilità di non essere tratti in errore dalle fluttuazioni: **ma con questo livello di fiducia il 5 % degli sperimentatori che operano correttamente daranno il risultato sbagliato.** Ovviamente miglioriamo le cose alzando il livello di fiducia p , per esempio, a **0.99**: ma in questo caso nell'1 % dei casi dei buoni sperimentatori daranno dei risultati errati. Se si ripete l'esperimento però, le cose migliorano: la probabilità di riavere la fluttuazione ingannevole due volte di seguito è molto bassa (in genere inferiore a $[1 - (1 - p)^2]$).

Il livello di fiducia è un parametro che qualifica probabilisticamente l'incertezza di una misura. Una misura viene quindi descritta da tre numeri: il valore stimato, l'incertezza su tale valore, che determina un intervallo, e il livello di fiducia che associa una probabilità a questo intervallo.

Attenzione ! spesso anche il valore teorico ha un'incertezza. In tal caso dobbiamo calcolare gli intervalli di confidenza sia per il valore teorico (v_T) che per il valore sperimentale (v_S). In effetti la cosa si semplifica se le due incertezze sono entrambe assimilabili a due deviazioni standard (di distribuzioni gaussiane). Allora possiamo costruire la differenza $d = v_S - v_T$. Nell'ipotesi che la teoria sia in accordo con l'esperimento, ci aspetteremmo $d = 0$, con una varianza pari alla somma delle due varianze. Quindi, dato il nostro livello di fiducia, possiamo costruirci l'intervallo di fiducia (che sarà simmetrico rispetto a 0): se il d trovato è dentro questo intervallo, allora la teoria è in accordo con l'esperimento, altrimenti no.

Statistica per piccoli campioni – La distribuzione t di Student

Supponiamo di avere un campione casuale di dimensione N $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ estratto da una popolazione normale di media μ e deviazione standard σ (per esempio N misure indipendenti di una certa grandezza fisica, con errore casuale gaussiano).

Calcoliamo la media e la varianza campionaria

$$(16.4) \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

e

$$(16.5) \quad S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

La variabile

$$(16.6) \quad t = \frac{\bar{x} - \mu}{S / \sqrt{N}}$$

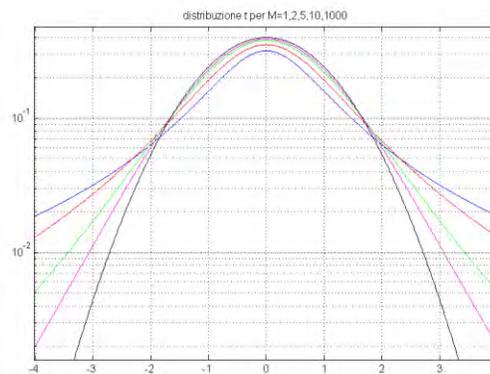
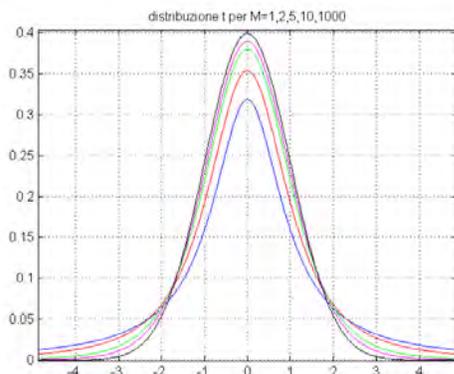
(analoga alla variabile z) segue la distribuzione t di Student²⁰, con N-1 gradi di libertà. Tale distribuzione è

$$(16.7) \quad f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{M+1}{2}\right)}{\sqrt{M\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{M}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{M}\right)^{-\frac{M+1}{2}}$$

dove M è chiamato "numero dei gradi di libertà"; ha media nulla e deviazione standard

$$\sigma = \sqrt{\frac{M}{M-2}}.$$

Per M grande tende a una gaussiana, per M=1 è una distribuzione di Cauchy. Ecco alcune delle distribuzioni della famiglia (per M=1,2,5,10,1000).



Per l'uso pratico si utilizzano delle apposite tavole (o, col calcolatore, delle opportune "funzioni").

In appendice si può consultare una tabella dei valori dei semi-intervalli relativi a qualche valore di livello di confidenza.

²⁰ Dallo pseudonimo dello statistico inglese William Sealy Gosset (1876-1937).

Stima della varianza

Nel capitolo 5 abbiamo dato questa definizione di varianza campionaria

$$(16.8) \quad \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

È questo un buon stimatore della varianza della popolazione da cui il campione $\{x_i\}$ è estratto? Prendiamone il valore atteso

$$(16.9) \quad E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right] = E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ (x_i - \mu) - (\bar{x} - \mu) \right\}^2 \right] = \\ = \frac{1}{n} E \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)(\bar{x} - \mu) + \sum_{i=1}^n (\bar{x} - \mu)^2 \right]$$

ora per il termine misto si ha

$$(16.10) \quad 2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)(\bar{x} - \mu) = 2 \cdot (\bar{x} - \mu) \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 2 \cdot n \cdot (\bar{x} - \mu)^2$$

e quindi, ricordando che la varianza sulla media è n volte minore della varianza sul singolo,

$$(16.11) \quad E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right] = E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - (\bar{x} - \mu)^2 \right] = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2$$

Come si vede il valore atteso dello stimatore del capitolo 5 non è la varianza della popolazione. Quindi questo stimatore è distorto, anche se per grandi valori di n, la distorsione è molto piccola. Esso dà mediamente un valore un po' più piccolo di quello vero. Preferiamo perciò, come stimatore della varianza, il seguente

$$(16.12) \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

che è corretto (“unbiased”, in inglese).

Se conosciamo il valore atteso μ , lo stimatore

$$(16.13) \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

è corretto.

Il calcolo della varianza sulla varianza campionaria è piuttosto complicato. Diamo qui, per riferimento, il risultato

$$(16.14) \quad \sigma_{\hat{\sigma}^2}^2 = \frac{1}{n} \left(\mu^{(4)} - \frac{n-3}{n-1} \sigma^4 \right)$$

dove $\mu^{(4)}$ è il momento centrale del quarto ordine. Se la distribuzione è gaussiana, si ha

$$(16.15) \quad \sigma_{\hat{\sigma}^2}^2 = \frac{2 \cdot \sigma^4}{n-1}$$

e la deviazione standard (che può essere presa come “incertezza” nella stima della varianza)

$$(16.16) \quad \sigma_{\hat{\sigma}^2} = \sigma^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

L'incertezza relativa sulla varianza è quindi $\sqrt{\frac{2}{n-1}}$ e, usando la solita regola per la propagazione dell'incertezza percentuale, l'incertezza relativa sulla deviazione standard è la metà della precedente, cioè $\sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}$.

Stima del coefficiente di correlazione

Abbiamo visto che per evidenziare la dipendenza statistica tra due variabili casuali possiamo estrarre un campione delle coppie dalle due popolazioni e calcolare il coefficiente di correlazione campionario²¹ (vedi (15.25)):

$$(16.17) \quad \tilde{\rho} = \frac{\tilde{\sigma}_{xy}}{\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\tilde{\sigma}_x} \cdot \frac{y_i - \bar{y}}{\tilde{\sigma}_y} \right)$$

con $\tilde{\sigma}_x$ e $\tilde{\sigma}_y$ calcolata in modo non distorto (vedi (16.12)).

Il problema ora è quello di valutare l'intervallo relativo ad un certo livello di fiducia. Per risolvere questo problema Ronald A. Fisher (1890-1962, statistico e genetista inglese) introdusse la trasformazione z' che da lui prende il nome:

$$(16.18) \quad z' = \frac{\ln(1+\rho) - \ln(1-\rho)}{2}$$

che è distribuita normalmente con valore atteso 0 e deviazione standard

$$(16.19) \quad \sigma_{z'} = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

²¹ Introdotto da Karl Pearson (1857-1936), statistico inglese.

Principio dei minimi quadrati e la stima dei parametri di una retta sperimentale

In un grafico che rappresenta punti sperimentali che collegano due parametri con dei punti allineati affetti da errori casuali (per esempio la misura del periodo al quadrato (T^2) e la misura della massa appesa (M) nell'esperimento della molla), si vogliono stimare i parametri della retta che meglio li descrive e valutare l'incertezza su di essi.

È questo il più semplice caso di “fit” di dati sperimentali ed è detto il problema del fit lineare.

Nel caso più generale, il problema è quello di trovare i parametri di una funzione di un certo tipo in modo da approssimare al meglio i dati sperimentali. Gauss, che doveva trovare i parametri orbitali del pianetino Cerere (scoperto nel 1801 a Palermo da Piazzi, ma poi “perso”), a partire dalle osservazioni, introdusse, per questo tipo di problemi, il **principio dei minimi quadrati**.

Limitiamoci al nostro semplice caso lineare. Supponendo che tutte le misure abbiano la stessa incertezza, esso stabilisce che la migliore retta $y = m \cdot x + q$ è quella in cui la somma dei quadrati tra i valori sperimentali e quelli della retta sia minima.

Supponiamo di avere le n coppie di misure $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, dove le misure x hanno errore trascurabile e le misure y hanno errore gaussiano con media 0 e deviazione standard σ ; per ciascuna di queste coppie scriviamo l'equazione

$$(16.20) \quad y_i = m \cdot x_i + q + \varepsilon_i$$

dove ε_i è l'errore sulla misura y_i . La somma dei quadrati degli errori è

$$(16.21) \quad n \cdot \overline{\varepsilon^2} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - m \cdot x_i - q)^2$$

imponiamo quindi le condizioni per il minimo (annullamento della derivata prima)

$$(16.22) \quad \frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial m} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial q} = 0$$

e risolviamo il sistema. Si trova per la stima di m

$$(16.23) \quad \hat{m} = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{\hat{\sigma}_{x,y}}{\Delta}$$

dove

$$(16.24) \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad \overline{x \cdot y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Notare che il numeratore è la covarianza campionaria di x e y ; il denominatore $\Delta = \overline{x^2} - \bar{x}^2$, detto braccio, ha la forma di una varianza campionaria, anche se in effetti non lo è, perché x non è una variabile casuale (sono valori scelti da noi): essa comunque misura la “larghezza” dell’insieme dei dati x . Quindi, come è intuitivo, più è larga la base dei dati x , migliore è la stima della pendenza della retta.

Per ottenere la stima di q facciamo

$$(16.25) \quad \hat{q} = \bar{y} - \hat{m} \cdot \bar{x}$$

Per le incertezze, in forma di deviazione standard, abbiamo

$$(16.26) \quad \sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n \cdot \Delta}} \quad \text{e} \quad \sigma_q = \sigma_m \cdot \sqrt{\bar{x}^2}$$

Attenzione ! queste formule sono ricavate nel caso in cui sono verificate le due ipotesi

- a) siano trascurabili le incertezze sulle x
- b) siano uguali tutte le incertezze sulle misure y

Se non è valida la prima condizione, il problema è molto più complesso (diventa non lineare) e si può risolvere o con trucchi (riportando per esempio l’incertezza sulla x sulla variabile y) o con procedure di ottimizzazione ricorsiva.

Se non è valida la seconda condizione, possiamo ricavare altre espressioni per le stime e le loro incertezze, basate sul “principio del minimo χ^2 ”²², che deriva dal principio della massima verosimiglianza (vedi in seguito). Si costruisce cioè la variabile

$$(16.27) \quad \chi^2(m, q) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{y_k - m \cdot x_k - q}{\sigma_k} \right)^2$$

costruita facendo la somma dei quadrati degli scarti divisi per le incertezze (deviazioni standard degli errori casuali), e si minimizza rispetto ai parametri m e q . Avendo posto

²² Vedi in seguito il cosiddetto test del χ^2 , che utilizza in modo diverso una simile espressione.

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k^2} \\
 S_x &= \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\sigma_k^2} & S_y &= \sum_{k=1}^n \frac{y_k}{\sigma_k^2} \\
 S_{xx} &= \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\sigma_k^2} & S_{xy} &= \sum_{k=1}^n \frac{x_k y_k}{\sigma_k^2} \\
 \Delta &= SS_{xx} - S_x^2
 \end{aligned}
 \tag{16.28}$$

si trovano i due stimatori

$$\begin{aligned}
 \hat{m} &= \frac{S_{xy}S - S_x S_y}{\Delta} \\
 \hat{q} &= \frac{S_{xx}S_y - S_x S_{xy}}{\Delta}
 \end{aligned}
 \tag{16.29}$$

con le incertezze

$$\begin{aligned}
 \sigma_m^2 &= \frac{S}{\Delta} \\
 \sigma_q^2 &= \frac{S_{xx}}{\Delta}
 \end{aligned}
 \tag{16.30}$$

e il coefficiente di correlazione tra l'incertezza su m e su q

$$r_{ab} = \frac{-S_x}{\sqrt{S \cdot S_{xx}}}
 \tag{16.31}$$

Il valore del χ^2 minimo ci dà un'indicazione della bontà del fit (tramite il test del χ^2 , con n - 2 gradi di libertà).

Dopo aver presentato la soluzione matematica a questo problema, vediamo come si possa fare “a mano” una stima dei coefficienti della retta che rappresenta dei dati sperimentali disposti su un grafico (vedi capitolo 6):

- con un righello trasparente tracciare la retta che si ritiene approssimi meglio i dati sperimentali. Si scelgano poi su di essa due punti abbastanza distanti definiti dalle coppie di coordinate $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$ e $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$. Il coefficiente angolare \mathbf{m} si ottiene da

$$(16.32) \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

mentre il q è il valore dell'asse delle ordinate per cui passa la nostra retta.

- per valutare l'incertezza su m , tracciare le due rette di minima e massima pendenza che però a nostro giudizio descrivono ancora ragionevolmente bene i dati; valutiamo quindi i coefficienti angolari m_1 e m_2 di queste due rette e indichiamo come incertezza su m

$$(16.33) \quad \Delta m = \frac{m_2 - m_1}{2}$$

Questa procedura manuale va in genere evitata quando si ha la possibilità di usare la più raffinata procedura matematica; tuttavia può essere utile per evidenziare eventuali punti fuori allineamento (forse errati). Può comunque essere una semplice verifica della corretta applicazione dell'algoritmo dei minimi quadrati.

Fit lineare generale – fit polinomiale

Possiamo applicare il metodo del minimo χ^2 , o dei minimi quadrati che ne è un caso particolare, a un fit fatto con una combinazione lineare di funzioni $f_i(x)$. Per esempio, se vogliamo fare un fit con una funzione sinusoidale di nota frequenza, ma incognita fase e ampiezza, possiamo porre

$$(16.34) \quad y(x) = A \cdot \sin(\omega_0 x + \varphi) = a_1 \sin \omega_0 x + a_2 \cos \omega_0 x$$

quindi le funzioni base in questo caso sono $f_1(x) = \sin(\omega_0 x)$ e $f_2(x) = \cos(\omega_0 x)$. Se stimiamo quindi a_1 e a_2 possiamo ottenere

$$\hat{A} = \sqrt{\hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^2}$$
$$\cos \hat{\varphi} = \frac{\hat{a}_1}{\hat{A}} \quad \sin \hat{\varphi} = \frac{\hat{a}_2}{\hat{A}}$$

Un altro caso notevole è quello del fit con un polinomio, in cui le funzioni base della combinazione lineare sono le $f_i(x) = x^i$, quindi

$$(16.35) \quad y(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_M x^{M-1}$$

che, come è chiaro, è lineare nelle incognite a_i .

In questi casi possiamo operare analogamente al caso del fit lineare, minimizzando l'espressione

$$(16.36) \quad \chi^2(a_1, a_2, \dots, a_M) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{y_k - \sum_{i=1}^M a_i f_i(x_k)}{\sigma_k} \right)^2$$

dove n è il numero dei punti sperimentali (o “osservazioni”) ed M il numero dei parametri liberi, x_k sono i valori dell'ascissa (noti senza incertezza) e σ_k le incertezze sulle osservazioni y_k (deviazioni standard dell'errore casuale aspettato). Questa stima è particolarmente conveniente se gli errori di misura sono gaussiani.

In genere si deve avere $M \leq n$, cioè il numero di parametri del fit dovrebbe essere minore o al massimo uguale al numero di osservazioni, altrimenti il problema è indefinito.

Il minimo della (16.36) si calcola annullando le derivate rispetto agli M parametri. Diamo soltanto il risultato del calcolo.

Avendo posto il vettore \mathbf{a} il vettore le cui componenti sono gli M parametri a_i da stimare, la matrice \mathbf{A} $n \times M$ con elementi

$$(16.37) \quad A_{ki} = \frac{f_i(x_k)}{\sigma_k}$$

e il vettore \mathbf{y}' con n elementi

$$(16.38) \quad y_k' = \frac{y_k}{\sigma_k}$$

costruiamo la matrice MxM

$$(16.39) \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$$

e il vettore con M elementi

$$(16.40) \quad \mathbf{b} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{y}'$$

Si ha che la stima dei parametri è data dalla soluzione del sistema di equazioni

$$(16.41) \quad \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{b}$$

La matrice inversa

$$(16.42) \quad \mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}$$

è la matrice di covarianza dei parametri a_k . Gli elementi sulla diagonale sono le varianze sui parametri, e quindi le incertezze sono

$$(16.43) \quad \sigma_i = \sqrt{C_{ii}}$$

Incertezza sul fit

Una volta fatto il fit e determinata l'incertezza sui parametri, quale è l'incertezza sul suo valore ? e quale è l'incertezza sulle derivate del suo valore ?

Facciamo il caso del fit polinomiale. Siano i dati

$$(16.44) \quad y_i = s_i + n_i = \sum_{k=0}^N a_i \cdot x_i^k + n_i$$

Con l'operazione di fit troviamo una stima di s_i data da

$$(16.45) \quad \tilde{s}_i = \sum_{k=0}^N (a_i + \varepsilon_i) \cdot x_i^k$$

dove ε_i è l'errore sulla stima di a_i , che possiamo supporre gaussiano con deviazione standard σ_i . L'incertezza su s_i , se gli errori sui coefficienti fossero indipendenti, sarebbe quindi

$$(16.46) \quad \Delta s_i = \sqrt{\sum_{k=0}^N |\sigma_i \cdot x_i^k|^2}$$

mentre considerando le correlazioni fra tutti i parametri si ha

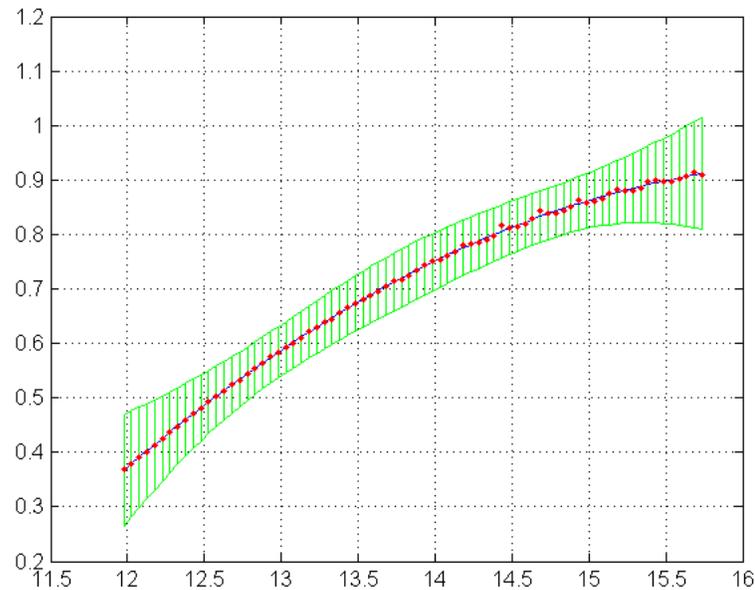
$$(16.47) \quad \Delta s_i = \sqrt{\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \frac{\partial s_i}{\partial a_j} \frac{\partial s_i}{\partial a_k} \sigma_{jk}} = \sqrt{\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n x_i^{j+k} \cdot \sigma_{jk}}$$

In generale, per un fit lineare fatto con le funzioni $f_i(x)$,

$$(16.48) \quad \Delta s_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial s_i}{\partial a_j} \frac{\partial s_i}{\partial a_k} \sigma_{jk}} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_j(x_i) \cdot f_k(x_i) \cdot \sigma_{jk}}$$

Nel fare il fit, e in particolare per valutare le incertezze sui parametri stimati, occorre mettere i valori dell'incertezza sulle singole misure, ma ciò spesso non può farsi correttamente. Allora si può mettere un valore presunto (costante) e quindi, dopo aver fatto il fit, calcolare la deviazione standard dei residui come vero valore dell'incertezza (media su tutte le misure) e poi rivalutare il valore presunto sul fit.

Ecco un esempio (le incertezze sono state ingrandite 100 volte per renderle visibili):



Fit polinomiale e sviluppo in serie

Il fit polinomiale di una serie di dati è utile anche quando la dipendenza che si cerca non è polinomiale. Il polinomio di fit infatti, se i residui sono “casuali”, contiene tutta l’informazione sul segnale e ha, in genere, una bassa dipendenza dai disturbi di misura e gli errori di quantizzazione. Il polinomio di fit è quindi analogo allo sviluppo in serie di Taylor per una funzione analitica. Possiamo quindi comodamente utilizzare il polinomio interpolante come l’espressione del segnale che stiamo misurando.

Per esempio, siano i nostri dati sperimentali $\{t_i, s_i\}$ dati di posizione di un oggetto (per semplicità, in una dimensione). Se ne facciamo il fit polinomiale²³, possiamo facilmente stimare la velocità dell’oggetto facendo la derivata del polinomio interpolante. Analogamente per la stima dell’accelerazione possiamo fare la derivata seconda del polinomio.

²³ Il fit non deve riguardare tutti i dati a nostra disposizione, ma solo la parte che ci interessa, il cui andamento è abbastanza semplice ed escludendo dati chiaramente errati.

Il principio della massima verosimiglianza e la media pesata

Supponiamo di osservare un campione $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ estratto, in modo che i singoli elementi siano indipendenti, da una popolazione descritta da

- (caso discreto) una distribuzione di probabilità $\{P_i\}$
- (caso continuo) una densità di probabilità $f(x)$

Siano nei due casi rispettivamente la distribuzione di probabilità o la densità di probabilità note a parte un parametro θ che vogliamo stimare dal campione osservato.

Definiamo **funzione di verosimiglianza (likelihood)**, nel caso discreto,

$$(16.49) \quad L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_i P(x_i | \theta)$$

e nel caso continuo

$$(16.50) \quad L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_i f(x_i | \theta)$$

La $L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$, se le $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sono prese come variabili e θ è un parametro, è una distribuzione di probabilità (corretta solo se le $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sono indipendenti). Come funzione di θ ed essendo $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ risultati dell'esperimento (il campione), ovviamente no.

Una molto diffusa tecnica per costruire uno stimatore del parametro θ è massimizzando l'espressione della verosimiglianza.

Poiché la $L(\theta)$ è sempre positiva, se ne può prendere il logaritmo

$$(16.51) \quad l(\theta) = \log(L(\theta))$$

e massimizzare questa nuova funzione che spesso è più semplice, ottenendo ovviamente lo stesso risultato.

L'applicazione del principio della massima verosimiglianza al problema del fit porta al metodo del minimo χ^2 che abbiamo già introdotto.

Consideriamo ora il caso in cui abbiamo varie misure di un parametro, ciascuna con una diversa incertezza, e vogliamo stimare il parametro. Questa situazione, molto frequente, è il caso più semplice di fit, il fit con una costante, e quindi si deve arrivare al metodo del minimo χ^2 . Sviluppiamo completamente questo caso.

Supponiamo che il parametro θ sia il valore atteso delle x_i e quindi le $f(x_i | \theta)$ siano normali, con parametri (θ, σ_i) . La verosimiglianza è

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_i} \exp\left(-\frac{(x_i - \theta)^2}{2\sigma_i^2}\right) =$$

(16.52)

$$= \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_i \frac{1}{\sigma_i} \right) \cdot \exp\left(-\sum_i \frac{(x_i - \theta)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

Si vede che massimizzare la verosimiglianza equivale a minimizzare $\sum_i \frac{(x_i - \theta)^2}{2\sigma_i^2}$ (la parte fuori dell'esponenziale è inessenziale per la massimizzazione), quindi, se le σ_i sono tutte eguali, il criterio della massima verosimiglianza equivale a quello dei minimi quadrati. Lo stimatore in questo caso non è altro che

$$\theta = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

(16.53)

Se le σ_i non sono tutte eguali, il massimo di L nella (16.52) si ha per

$$\frac{\partial \left(\sum_i \frac{(x_i - \theta)^2}{2\sigma_i^2} \right)}{\partial \theta} = 0$$

(16.54)

da cui

$$\sum_i \frac{(x_i - \theta)}{\sigma_i^2} = 0$$

(16.55)

e quindi

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

(16.56)

cioè la migliore stima di θ , secondo il criterio della massima verosimiglianza, si ha con una media pesata (o ponderata)

$$(16.57) \quad \theta = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$$

con

$$(16.58) \quad a_i = \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

ovviamente i pesi sono maggiori per le misure con incertezze minori. Si noti che il risultato non cambia se tutte le incertezze sono moltiplicate per uno stesso fattore (le \mathbf{a}_i sono le stesse).

L'incertezza è data da

$$(16.59) \quad \Delta\theta = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

Se le incertezze sono tutte eguali, si ricava la solita espressione per l'incertezza delle misure ripetute.

Cerchiamo di capire la "ragionevolezza" di queste formule. Supponiamo di avere due serie di misure di una stessa grandezza con incertezza sulla singola misura σ , una di N_1 misure ed una di N_2 . Troviamo le due medie $\bar{x}_1 \pm \sigma_1$ e $\bar{x}_2 \pm \sigma_2$ con $\sigma_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{N_1}}$ e $\sigma_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{N_2}}$. Come possiamo

mettere insieme i due risultati?

Ovviamente il valore che vogliamo deve essere la media totale

$$(16.60) \quad \bar{x}_T = \frac{N_1 \cdot \bar{x}_1 + N_2 \cdot \bar{x}_2}{N_1 + N_2} = \frac{\frac{\bar{x}_1}{\sigma_1^2} + \frac{\bar{x}_2}{\sigma_2^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}$$

come calcolato anche dalla (16.56). L'incertezza sulla x_T è

$$(16.61) \quad \sigma_T = \frac{\sigma}{\sqrt{N_1 + N_2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

come ci aspettiamo dalla (16.59).

Stima del p di una successione di prove alla Bernoulli

Applichiamo il principio della massima verosimiglianza per stimare il parametro p di una successione di prove alla Bernoulli $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$; gli x_i sono o 0 o 1 e siano usciti k 1.

La verosimiglianza è

$$(16.62) \quad L(p; x_1, x_2, \dots, x_N) = \prod_i P(x_i | p) = p^k \cdot (1-p)^{N-k}$$

che ha derivata rispetto a p pari a

$$(16.63) \quad \frac{dL}{dp} = \prod_i P(x_i | p) = k \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{N-k} - p^k \cdot (N-k) \cdot (1-p)^{N-k-1}$$

Uguagliandola a 0, si ha

$$(16.64) \quad k \cdot (1-p) = (N-k) \cdot p$$

$$p = \frac{k}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

cioè la stima di p è la media del campione, come ci si aspettava. Ricordiamo che la varianza di una variabile con distribuzione di Bernoulli è $\sigma^2 = p \cdot (1-p)$, quindi la media del campione avrà una deviazione standard

$$(16.65) \quad \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{N}}$$

che è l'incertezza della stima di p .

17 - Test statistici

- Test di ipotesi
- Livello di significatività
- Test di verifica di un valore teorico
- Test di consistenza tra due misure
- Test del χ^2
- Gradi di libertà

Un problema centrale che si pone negli esperimenti scientifici è **decidere** se i risultati di un certo esperimento sono in accordo con la teoria. Per esempio, la traiettoria osservata di un corpo in caduta libera è in accordo con la legge di gravitazione? I risultati di un esperimento con il pallinometro sono in accordo con la formula teorica della distribuzione attesa delle frequenze dei vari bin?

In altri casi sperimentali, potremmo voler **testare** se ci sono differenze in due diverse procedure sperimentali, oppure **verificare** l'efficacia di un certo trattamento (per esempio l'assunzione di un farmaco per la cura di una certa malattia).

Analoghe domande si possono porre per esempio nel controllo di qualità dei prodotti (i pneumatici prodotti da un certo stabilimento hanno una durata maggiore di quelli di un altro?) o in altri campi della tecnica.

Questo tipo di problemi, che implicano una decisione (sì o no) è formalizzato nella teoria statistica dei test d'ipotesi, che è un altro aspetto dell'inferenza statistica. In questa teoria vengono prima di tutto formulate due ipotesi: l'ipotesi H_0 , detta **ipotesi nulla**, e l'ipotesi H_1 , detta **ipotesi alternativa**. Per esempio, l'ipotesi H_0 , che in genere è quella più precisamente definita, nel caso della verifica sperimentale di una teoria, potrebbe essere che ci sia perfetto accordo tra teoria ed esperimento (errore nullo); nel caso del farmaco potrebbe essere che non ci sia effetto (effetto nullo).

Lo scopo di un test di ipotesi è valutare se c'è sufficiente evidenza statistica per accettare l'ipotesi H_0 . Per far ciò calcoliamo una funzione del campione (la "statistica" del test) particolarmente utile per poter discriminare la presenza o l'assenza dell'effetto in oggetto. La distribuzione della statistica del test viene quindi utilizzata per definire l'insieme dei valori di accettazione (detto *regione di accettazione*) e il suo complementare, l'insieme dei valori di rigetto (detto *regione critica o di rigetto*).

Il risultato del test, cioè la nostra **decisione**, è sempre o l'accettazione o il rifiuto dell'ipotesi, a seconda che la statistica del test fornisca valori interni alla regione di accettazione o di rigetto.

Nel far ciò possiamo aver fatto la scelta giusta o compiuto un errore. Abbiamo il seguente schema:

	Situazione reale	
Decisione statistica	H_0 vera	H_0 falsa
Accettare H_0	$P = 1 - \alpha$	Errore di secondo tipo: $P = \beta$
Rifiutare H_0	Errore di primo tipo: $P = \alpha$	$P = 1 - \beta$

Vediamo che si possono commettere due tipi di errori:

- il primo, a cui è associata la probabilità α , chiamata **livello di significatività** del test, capita quando rifiutiamo un'ipotesi H_0 vera. Questa probabilità viene chiamata talvolta *probabilità di falso allarme*.
- il secondo, a cui è associata una probabilità β , capita quando accettiamo come buona una ipotesi H_0 falsa.

Notiamo che $1 - \alpha$ è equivalente al livello di fiducia φ introdotto nel capitolo precedente parlando della stima dell'intervallo di fiducia.

Possiamo decidere di diminuire la probabilità di un certo tipo di errore (cambiando la soglia di decisione), ma così facendo aumentiamo la probabilità dell'errore dell'altro tipo. La scelta della soglia può essere fatta associando a ciascun tipo di errore un **costo** (per esempio C_1 e C_2), e quindi porre la soglia di decisione in modo da minimizzare il suo valore atteso

$$(17.1) \quad E[C] = C_1 \cdot \alpha + C_2 \cdot \beta$$

La probabilità associata alla statistica osservata viene detta "livello di significatività osservato". Se questo valore è vicino al livello di significatività α , si può pensare, ove possibile, di ripetere il test.

Nella costruzione di un test statistico talora non si considerano gli errori di secondo tipo.

Test di consistenza con un valore teorico

Supponiamo di avere una misura sperimentale \mathbf{m} , con incertezza $\Delta\mathbf{m}$ (rappresentante la deviazione standard dell'errore casuale) e vogliamo decidere se è consistente con un valore teorico \mathbf{t} (con incertezza trascurabile). Definiamo *a priori* un livello di fiducia φ (o, equivalentemente, un livello di significatività $\alpha = 1 - \varphi$), e calcoliamo (con le tavole dell'integrale della gaussiana) il semi-intervallo di fiducia relativo z_φ .

Valutiamo quindi

$$(17.2) \quad z = \frac{|m - t|}{\Delta m}$$

e decidiamo sul superamento del test sulla base del valore di $z_\varphi - z$: se è positivo il test è superato (accettiamo l'ipotesi), altrimenti rigettiamo l'ipotesi.

Test di consistenza tra due valori sperimentali

Supponiamo di avere due misure \mathbf{m}_1 e \mathbf{m}_2 con incertezze relativamente $\Delta\mathbf{m}_1$ e $\Delta\mathbf{m}_2$ (o analogamente un valore sperimentale e uno teorico con incertezza non trascurabile). Ci domandiamo se sono compatibili, avendo definito un certo livello di fiducia.

Per costruire il test, costruiamo una nuova grandezza $\mathbf{d} = \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2$ che ha incertezza

$\Delta d = \sqrt{\Delta m_1^2 + \Delta m_2^2}$. Se le due misure sono consistenti, il valore atteso di \mathbf{d} è 0. Costruiamo quindi l'intervallo di fiducia relativo al livello di fiducia e al $\Delta\mathbf{d}$, simmetricamente a \mathbf{d} , e verifichiamo se il valore 0 è interno od esterno a questo intervallo: nel primo caso accettiamo l'ipotesi, altrimenti la rigettiamo.

Test del χ^2

Se la verifica di un'ipotesi teorica corrisponde alla verifica della consistenza di più valori sperimentali, ognuno con la sua incertezza, con altrettanti valori teorici, è molto usato il **test del χ^2** (chi quadro).

Supponiamo per esempio di avere un grafico (x, y) , in cui, in corrispondenza di n punti $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ sulle ascisse, siano riportati n punti sperimentali $\{y_1^{(S)}, y_2^{(S)}, \dots, y_n^{(S)}\}$, con incertezze "gaussiane" $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$, e si voglia testare la consistenza tra essi e gli n valori teorici $\{y_1^{(T)}, y_2^{(T)}, \dots, y_n^{(T)}\}$. Supponiamo inoltre che gli errori di misura siano indipendenti e che non siano state ricavate informazioni dai dati sperimentali per calcolare i valori teorici. In questo caso costruiamo la variabile

$$(17.3) \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i^{(S)} - y_i^{(T)})^2}{\sigma_i^2}$$

Notiamo che gli elementi della sommatoria sono quadrati di variabili normali standardizzate, quindi la variabile da noi costruita ha la distribuzione del χ^2 con n gradi di libertà. Se quindi definiamo un livello di fiducia φ (o, equivalentemente, un livello di significatività $\alpha = 1 - \varphi$), possiamo calcolare quale sia il valore limite χ_{MAX}^2 tale che

$$(17.4) \quad \varphi = \int_0^{\chi_{MAX}^2} f_{\chi^2}^{(n)}(x) dx$$

dove $f_{\chi^2}^{(n)}(\cdot)$ è la densità di probabilità del χ^2 con n gradi di libertà. I valori di χ_{MAX}^2 per un dato valore del livello di fiducia e per un dato numero di gradi di libertà, sono tabulati su tavole come quella in appendice a questi appunti.

Se il valore calcolato dalla (17.3) è inferiore al χ_{MAX}^2 allora il test è superato, cioè c'è accordo tra i valori sperimentali e teorici.

Se per calcolare i valori teorici abbiamo dovuto valutare m parametri indipendenti di un'equazione a partire dagli n numeri sperimentali, allora si abbassa il numero di gradi di libertà a $n - m$ e quindi dobbiamo usare la distribuzione del χ^2 con $n - m$ gradi di libertà.

Un caso particolare di test del χ^2 è quello che si usa per testare la consistenza tra una distribuzione teorica e un istogramma di frequenza.

A partire dalla distribuzione teorica e dal numero di dati istogrammati, calcoliamo i valori teorici delle frequenze degli $m < n$ bin, a partire dalle probabilità $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ e moltiplicandole per n ; siano questi valori teorici $\{h_1^{(T)}, h_2^{(T)}, \dots, h_m^{(T)}\}$. Siano invece $\{h_1^{(S)}, h_2^{(S)}, \dots, h_m^{(S)}\}$ le frequenze trovate sperimentalmente per ciascun bin, istogrammando gli n dati. Si noti che il parametro n lo

possiamo ricavare sommando tutte le frequenze ottenute per i vari bin, quindi il numero di gradi di libertà si riduce di 1. Ulteriori riduzioni possono aversi se ci occorrono altri parametri per calcolare le \mathbf{p}_i .

Notiamo inoltre che le distribuzioni della frequenza nell' i -esimo bin è distribuita secondo una distribuzione binomiale con parametri \mathbf{n} e \mathbf{p}_i , e, se i bin sono tanti, \mathbf{p}_i è piccolo e quindi la binomiale si può approssimare, in tal caso, ad una poissoniana; quindi la varianza è proprio $h_i^{(T)}$. Costruiamo quindi la variabile

$$(17.5) \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(h_i^{(S)} - h_i^{(T)})^2}{h_i^{(T)}}$$

(se i bin sono pochi, l'approssimazione poissoniana porta a sottovalutare il valore di χ^2).

Attenzione però ! Abbiamo visto che le fluttuazioni casuali (le differenze tra $h_i^{(S)}$ e $h_i^{(T)}$ sono distribuiti secondo Poisson, mentre per poter usare il test del χ^2 ed avere la distribuzione del χ^2 sulla variabile costruita, queste poissoniane devono essere approssimabili da gaussiane, cosa che capita se il loro μ è abbastanza elevato (per esempio > 20). Ma ciò, se può essere verificato per i bin centrali, quasi sempre non lo è per quelli estremi che sono tipicamente più poveri. Possiamo allora seguire una delle seguenti due strade:

- trascuriamo i bin periferici (in tal caso il numero di gradi di libertà è dato semplicemente dal numero dei bin considerati)
- "accorpriamo" (cioè sommiamo i loro contenuti) più bin insieme (non necessariamente adiacenti); in questo caso il numero di gradi di libertà si calcola nel modo normale.

18 – Conclusioni: applicazioni del calcolo delle probabilità alla misura

La motivazione fondamentale di questo studio del calcolo delle probabilità e della statistica è l'applicazione alla **misura di una grandezza fisica**. Questa può essere ottenuta **direttamente** tramite uno strumento di misura o **indirettamente** tramite una formula e la conoscenza di una o più misure di altre grandezze. Rivediamo ora brevemente la misura in modo più maturo, alla luce dei concetti sviluppati.

Il processo di misura non dà (a parte eccezioni) il valore vero della grandezza (che si suppone esista) a causa di inevitabili **errori di misura**, che abbiamo così schematizzato:

- **errore di sensibilità** (o **errore di lettura**), spesso detto **errore di quantizzazione** nel caso degli strumenti digitali, definito come la minima variazione della grandezza apprezzabile in modo oggettivo. Abbiamo visto che questo può essere schematizzato come una variabile casuale con distribuzione uniforme e in genere di essa si dà la semi-larghezza. Se l'errore casuale è trascurabile (misure di bassa sensibilità), se ripetiamo la misura l'errore di lettura è sempre lo stesso. Se invece la ripetizione della misura dà risultati diversi (a causa dell'errore casuale), anche l'errore di lettura è diverso per ogni ripetizione della misura e quindi farne la media lo riduce. In tale caso, come sempre che si debbano mettere insieme errori di lettura ed errori casuali (come capita in certe misure indirette) è bene esprimere l'errore di lettura in termini della sua deviazione standard (ciò si ottiene dividendo la semi-larghezza per $\sqrt{3}$): in tal modo tutti gli errori sono espressi in termini di deviazione standard.
- **errore sistematico**, dovuto soprattutto ad errata taratura degli strumenti o a perturbazione della misura da parte dello strumento. Questo errore, per una data misura con un dato strumento, è sempre lo stesso. Parte di esso può essere corretto, ma parte no, e questa parte può essere schematizzata, *a priori*, cioè prima di fare qualsiasi misura, come una variabile casuale con una certa distribuzione. *A posteriori* (cioè dopo la prima misura) invece ha sempre lo stesso valore, quindi, ripetendo la misura e facendo la media non migliora l'errore sistematico.
- **errore casuale**, dovuto a molteplici cause, è presente soprattutto quando facciamo misure di elevata sensibilità. Questo può essere visto come un valore aggiuntivo alla misura, positivo o negativo, spesso distribuito in modo normale. Spesso esprimiamo questo errore con la deviazione standard della distribuzione. Esso cambia di valore ogni volta che facciamo la misura, in genere in modo indipendente. Questo fatto ci permette di ridurlo, prendendo la media di n misure, di un fattore \sqrt{n} .

La presenza degli errori di misura limita la qualità della misura, quindi accanto al valore più "ragionevole" o "probabile" della misura diamo l'**incertezza**.

L'incertezza può essere espressa in vari modi, dipendentemente dal tipo di errore e dall'uso che ne vogliamo fare. Molto spesso viene espressa tramite la deviazione standard della distribuzione degli errori (e quindi può conglobare anche la parte di errore sistematico non noto). Alternativamente, un modo di esprimere l'incertezza è facendo riferimento ad un **livello di fiducia** collegato ad un **intervallo di fiducia**: scelto il livello di fiducia p (per esempio 0.99), possiamo dare come

incertezza (in questo caso viene chiamata “incertezza estesa”) la semi-larghezza dell’intervallo con centro il valore più probabile e tale che abbiamo una probabilità p che il valore vero sia nell’intervallo.

Nel caso delle misure indirette, basate su altre misure di base, l’incertezza si propaga col meccanismo della somma quadratica. Bisogna però fare attenzione a che le misure di base non siano correlate, altrimenti bisogna utilizzare la formula più complessa sviluppata nel capitolo 14.

Esiste un interessante documento del 1994, “Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results”, (<http://physics.nist.gov/Document/tn1297.pdf>), prodotto dal NIST, l’istituto americano per gli standard, basato su un documento dell’ISO (International Organization for Standardization), che indica le linee guida per l’espressione dell’incertezza di misura.

Parte terza – Misure meccaniche

19 - Misure di intervalli di tempo

Introduzione

La misura del tempo, come quella delle lunghezze e delle masse, ha sempre accompagnato la civiltà umana. Ma nel caso del tempo l'osservazione della periodicità dei fenomeni astronomici (e quelli terrestri ad essi collegati, come l'alternarsi di stagioni fredde e calde o le piene di fiumi come il Nilo), ha stimolato fortemente anche la scienza.

L'astronomia antica nacque soprattutto con lo scopo di misurare il tempo. Dalle osservazioni del moto apparente del Sole, della Luna e delle stelle, sacerdoti o sapienti, costruirono, nelle varie civiltà, i primi calendari.

Il nostro calendario, di 365 giorni con gli attuali mesi e il Febbraio bisestile ogni 4 anni, deriva dalla riforma voluta da Giulio Cesare nel 46 a.C.. L'anno del calendario giuliano era però leggermente più lungo del dovuto (di circa 11 minuti e 15 secondi) e, dopo circa 16 secoli si erano accumulati circa 10 giorni. Nel 1582 il papa Gregorio XIII promulgò una nuova riforma del calendario²⁴, per cui gli anni multipli di 100, ma non di 400, non sarebbero stati bisestili (così il 1900 non è stato bisestile, mentre il 2000 sì). Per correggere l'errore accumulato, saltò 10 giorni: il giorno 4 ottobre 1582, giovedì, fu perciò seguito dal 15 ottobre, venerdì.

Il calendario gregoriano fu accettato all'inizio solo da pochi stati cattolici (in Italia, Spagna, Portogallo, Polonia e Lituania), successivamente seguirono gli altri. In Gran Bretagna (e nelle colonie americane che sarebbero diventate gli Stati Uniti) fu adottato nel 1752, in Giappone nel 1873, in Russia nel 1918²⁵, in Grecia nel 1923, in Turchia nel 1926, in Cina (definitivamente) nel 1929.

Le osservazioni astronomiche e i calendari sono utili per misure di intervalli di tempo “lungi”, ma lo sono molto meno per brevi intervalli di tempo o per misure in situazioni in cui gli astri non sono osservabili. In effetti le meridiane²⁶, strumenti che indicano l'ora e talvolta il giorno dell'anno basandosi sulla posizione del sole, a causa della dimensione angolare del sole (circa mezzo grado), hanno, nella migliore ipotesi, una “incertezza” di circa un minuto.

Per la misura di brevi intervalli di tempo sono stati costruiti, fin dall'antichità strumenti particolari. Il più noto è la clessidra, in cui si osserva il tempo occorrente a svuotare un serbatoio contenente acqua o sabbia.

Dal XIII secolo furono costruiti i primi “orologi”, meccanismi che permettevano di misurare il tempo. La loro precisione, tuttavia, migliorò considerevolmente solo dopo gli studi di Galileo e

²⁴ L'interesse del papa non era tanto scientifico, quanto religioso: un buon calendario era infatti importante per stabilire la data della Pasqua, definita come la prima domenica dopo il primo plenilunio di primavera.

²⁵ La cosiddetta Rivoluzione d'Ottobre iniziò secondo il calendario gregoriano nel Novembre del 1917.

²⁶ Le meridiane erano già note nell'antico Egitto e presso i Babilonesi e, in una certa forma, probabilmente fin dalla preistoria.

Huygens, nel '600, sul pendolo. Fu da allora che il tempo fu definito come lo è tutt'ora, con le ore, i minuti e i secondi.

L'uso della scala sessagesimale, analoga a quella usata per gli angoli, è di derivazione babilonese ed è sopravvissuta per la comodità di avere una base, il 60, divisibile per 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 20 e 30, e per la praticità delle unità derivate: l'ora, il minuto e il secondo (le prime due non SI).

Unità di misura

Il secondo, l'unità di misura per gli intervalli di tempo, fu inizialmente definito come 1/86400 del giorno solare medio. Ci si rese conto però che la durata del giorno aumentava nel tempo (a causa delle maree dovute al Sole e alla Luna) di circa **1.7 ms al secolo**. Nel 1960 fu quindi stabilito di prendere come riferimento la lunghezza (supposta a partire dalle osservazioni recenti) dell'anno 1900. Con esattezza si definì il secondo come **la frazione di 1/31 556 925.9747 dell'anno tropico²⁷ per il 1 gennaio 1900 alle ore 12**.

In seguito, nel 1967, fu data la nuova definizione di secondo:

Il secondo è la durata di 9 192 631 770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra due livelli iperfini, da (F=4, MF=0) a (F=3, MF=0), dello stato fondamentale dell'atomo di cesio-133.

Con questa definizione il secondo non è più legato alla rotazione della Terra, ma alle proprietà di un certo atomo. Il calendario, invece, è rimasto quello gregoriano: ciò crea un problema che discuteremo in uno dei prossimi paragrafi.

²⁷ L'anno tropico è l'intervallo temporale tra due successivi equinozi di primavera (un equinozio è il momento in cui il sole attraversa l'equatore celeste).

Ordini di grandezza dei tempi

tempo di Planck	5.4×10^{-44} s
vita media dei bosoni W e Z	3×10^{-25} s
decadimento del quark top	10^{-24} s
più breve tempo misurato	10^{-18} s
tempo di esecuzione di un'istruzione su un calcolatore	$< 10^{-9}$ s
battito di palpebre	$\sim 6 \times 10^{-2}$ s
1 giorno	86400 s
1 anno	3.1×10^7 s
1 secolo	3.1×10^9 s
età della Terra	1.4×10^{17} s
età dell'Universo (tempo dal Big Bang)	4.3×10^{17} s

Note

Il tempo di Planck è la più semplice combinazione di costanti fondamentali della Fisica che dia un tempo. È data da

$$(19.1) \quad \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$$

dove \hbar è la costante di Planck ridotta, G la costante gravitazionale e c la velocità della luce. È considerata l'unità "naturale" di tempo.

Orologi

Lo schema generale di un orologio è il seguente:

- a) Un sistema fisico che mostra un comportamento periodico, cioè l'oscillatore (per esempio il pendolo)
- b) Un sistema che fornisce energia al sistema a) (per esempio il sistema a peso e scappamento usato nei vecchi orologi a pendolo)
- c) Un sistema che conti le oscillazioni di a) (per esempio gli ingranaggi a demoltiplica)
- d) Un sistema che mostri il risultato di questo conteggio (per esempio il quadrante)

La parte più importante e delicata è l'oscillatore, che deve essere molto "preciso"²⁸, deve essere immune per quanto possibile da variazioni di variabili ambientali (soprattutto la temperatura) e, per quanto possibile, di pratica utilizzabilità.

Inizialmente si è utilizzato il pendolo (il primo orologio a pendolo fu costruito da Christiaan Huygens nel 1657), quindi si introdusse l'uso del bilanciere (un piccolo volano con una molla spiraliforme) che aveva il vantaggio di essere più immune dalle vibrazioni e di poter funzionare in qualsiasi posizione, e quindi poterono costruirsi orologi portatili. Con lo sviluppo dell'elettronica si sono sviluppati orologi in cui l'oscillatore è un cristallo di quarzo piezoelettrico: questi sono attualmente i sistemi più diffusi di misura del tempo.

Per esigenze di alta precisione, sono stati sviluppati, a partire dagli anni 50 dello scorso secolo, orologi basati sulla frequenza della radiazione emessa da atomi eccitati. Sono stati utilizzati l'idrogeno-1, il cesio-133 e il rubidio-87.

Per quanto riguarda l'accuratezza degli orologi, questa è andata via via aumentando. Nel passato (fino alla scoperta delle onde radio) orologi di grande accuratezza (e che potessero funzionare col mare in tempesta) erano di fondamentale importanza per la navigazione: dalla conoscenza precisa dell'ora e dalle osservazioni astronomiche eseguite col sestante si poteva ricavare la longitudine²⁹. Per la realizzazione di un tale orologio³⁰ la Gran Bretagna offrì nel 1714 un premio di 20000 sterline (svariati milioni di euro). Il premio fu vinto da John Harrison nel 1761: il suo cronometro perse meno di 5 s in 10 giorni.

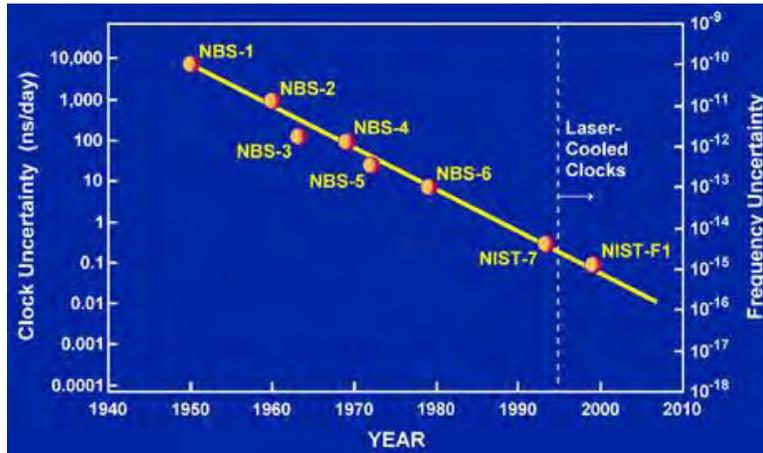
L'accuratezza degli orologi (in genere a quarzo) è fortemente aumentata da sistemi di correzione automatica tramite ricezione radio. A questo scopo esistono varie possibilità. Attualmente una è costituita da particolari trasmettenti a onde lunghe (l'Europa è quasi completamente coperta da una trasmettente in Germania, a Maiflingen, vicino a Francoforte: la DCF77, a 77.5 kHz). Migliore accuratezza si ha utilizzando il segnale del sistema GPS, ma per usarlo in interni occorre un'antenna esterna.

²⁸ In termine tecnico si dice che deve avere alto Q.

²⁹ Per determinare la latitudine basta osservare, nell'emisfero nord, l'altezza della stella polare e nell'emisfero sud osservare la Croce del Sud.

³⁰ In effetti il premio era per qualsiasi sistema con cui si potesse misurare la longitudine con un errore inferiore alle 30 miglia nautiche (56 km) e furono proposti anche metodi basati sull'osservazione della posizione della luna o dei satelliti di Giove.

Nella figura seguente è mostrato il miglioramento in accuratezza per gli orologi atomici in circa sessant'anni di sviluppo:



Tempo Universale e Tempo Atomico

Come abbiamo visto, l'attuale definizione di secondo è indipendente dalle osservazioni astronomiche. Tuttavia è importante che le attività umane siano sincronizzate con il moto di rotazione della Terra che, come si è detto, rallenta in modo irregolare, ma in media di circa 1.7 ms al secolo. Sono state quindi definite due scale temporali, il Tempo Atomico Internazionale (TAI), basato sull'osservazione dei migliori orologi atomici disponibili, e il Tempo Universale Coordinato³¹ (UTC), legato alle osservazioni astronomiche. In entrambe l'unità di misura è il secondo del Sistema Internazionale, ma quando nelle osservazioni³² astronomiche si accumula un ritardo di (circa) 1 s, all'UTC viene aggiunto un secondo (detto "secondo intercalare" o, in Inglese, leap second). Ciò viene fatto attualmente solo alla mezzanotte del 31 dicembre o del 30 giugno UTC. Ci sono quindi ogni tanto giorni con un secondo in più.

Dal 1958, quando è stato istituito il TAI, finora (2010), sono stati aggiunti 35 secondi intercalari, l'ultimo dei quali il 30 giugno 2012. L'ultimo minuto del giugno 2012 ha avuto 61 secondi, e quindi abbiamo dovuto correggere tutti gli orologi.

Potrebbe sembrare che la discrepanza di 1.7 ms al secolo per la durata del giorno sia un effetto del tutto trascurabile per gli usi pratici. Ma non è così: infatti questa piccola differenza (una parte su circa 50 milioni) va integrata nel tempo per calcolare il ritardo totale. Se la lunghezza del giorno è $l = l_0 + \varepsilon \cdot t$, si accumula un ritardo pari a

$$(19.2) \quad \Delta t = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot t^2$$

³¹ L'UTC ha sostituito nella sua funzione di riferimento civile internazionale il Greenwich Mean Time (GMT).

³² L'ente internazionale preposto a questo scopo è l'**International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS)**, che ha sede a Parigi (<http://www.iers.org/>).

Si noti che il ritardo cresce quadraticamente col tempo. Se nei primi 50 anni del TAI si è accumulato un ritardo di poco più di 30 s, in futuro questa differenza dovrebbe accelerare e quindi, onde evitare l'introduzione di molti leap-second all'anno, si dovrà probabilmente ridefinire il secondo.

Il tempo siderale

La durata del giorno è definita dalla rotazione della Terra rispetto al Sole: precisamente la durata del giorno solare è l'intervallo di tempo tra due passaggi del sole per il meridiano celeste locale (cioè per il sud); questo varia durante l'anno di circa ± 15 minuti, a causa dell'inclinazione dell'eclittica³³ e della ellitticità (e quindi non costante velocità) dell'orbita terrestre. Viene perciò definito **giorno medio** la media di questa durata.

È molto utile per le osservazioni astronomiche il **giorno siderale**³⁴, definito come l'intervallo di tempo tra due passaggi al meridiano locale di una stessa stella. **Esso quindi definisce la rotazione della Terra rispetto alle stelle fisse.**

Il giorno siderale ha una durata di circa 1/365.242 volte più breve del giorno solare medio, cioè circa 86164 s, pari a 23h56m4s.

Il giorno siderale è diviso in 24 ore siderali e quindi in minuti e secondi siderali.

Effetti relativistici

Come dimostrato da Einstein nelle Teorie della Relatività Speciale e Generale, il tempo non è lo stesso per tutti gli osservatori, ma dipende dalla velocità relativa (teoria della relatività speciale) e dal campo gravitazionale (teoria della relatività generale). Non possiamo qui illustrare queste teorie, ma è utile indicare quantitativamente la portata di questi effetti.

Secondo la teoria della relatività speciale (o ristretta), un orologio che si muove rispetto ad un osservatore ad una velocità v , rallenta rispetto a un orologio solidale con l'osservatore di un

fattore $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ dove c è la velocità della luce (effetto cinematico).

Secondo la teoria della relatività generale, un orologio in un campo gravitazionale rallenta di un

fattore $\sqrt{1 - \frac{2GM}{r \cdot c^2}}$ dove $G=6.67428(67) \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ è la costante gravitazionale, M la massa che causa il campo gravitazionale, r la distanza dal centro di massa e c , al solito, la velocità della luce (effetto gravitazionale).

³³ L'eclittica è l'intersezione del piano dell'orbita terrestre con la sfera celeste. Essa, che è un cerchio massimo, è inclinata rispetto all'equatore celeste di $23^\circ 27'$ e lo incontra nei due punti equinoziali.

³⁴ Siderale vuol dire "stellare" (dal latino *sidus*).

Valutiamo gli effetti relativistici nel caso di un satellite artificiale. Consideriamo uno dei satelliti usati per il GPS (Global Positioning System), che sono alla quota di 20200 km, dove compiono esattamente due rotazioni nel periodo di un giorno siderale. Ricordiamo che la Terra ha una massa di $5.97 \cdot 10^{24}$ kg e un raggio medio di 6370 km. Per l'effetto cinematico calcoliamo approssimativamente, in un giorno, un ritardo di

$$\Delta t = T_{1\text{giorno}} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right) = 86400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\pi(6300 + 20200) / (86164 / 2)}{3 \cdot 10^5} \right)^2 \approx 7.1 \mu s$$

Per l'effetto gravitazionale abbiamo

$$\Delta t = T_{1\text{giorno}} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_{\text{distanza satellite}} \cdot c^2}} - \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_{\text{superficie Terra}} \cdot c^2}} \right) \approx -46 \mu s$$

e quindi in totale $\sim -39 \mu s$.

Nel 1971 Hafele e Keating hanno mandato a bordo di aeroplani di linea, in due giri intorno alla Terra, uno verso est ed uno verso ovest, 4 orologi al Cesio. Ecco i risultati del loro esperimento, in ritardo rispetto al tempo terrestre:

	Time difference in ns	
	Eastward	Westward
Gravitational	144 ± 14	179 ± 18
Kinematic	-184 ± 18	96 ± 10
Net effect	-40 ± 23	275 ± 21
Observed:	-59 ± 10	273 ± 21

Misure di frequenza

In un fenomeno periodico la frequenza indica il numero di periodi nell'unità di tempo. L'unità di misura della frequenza, spesso indicata con ν , è l'hertz (Hz) pari alla frequenza di un periodo (o ciclo) al secondo.

Talora per descrivere fenomeni periodici viene utilizzata, invece della frequenza, la pulsazione o frequenza angolare $\omega = 2\pi \cdot \nu$, misurata in radianti al secondo.

Per i fenomeni ondulatori, la frequenza è inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda λ . Si ha

$$(19.3) \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$$

dove c è la velocità di propagazione del fenomeno ondulatorio.

Una misura di frequenza si fa in genere contando il numero di periodi del segnale in osservazione in un dato tempo, oppure misurando il tempo impiegato a compiere un certo numero di periodi. Quindi l'incertezza sulla misura della frequenza dipende dall'incertezza sul tempo e dall'incertezza sul conteggio dei periodi. Se quest'ultima è trascurabile, l'incertezza relativa sulla misura di frequenza è pari all'incertezza relativa sulla misura di tempo.

Inoltre il numero di periodi contati è in genere un numero intero: in tal caso, quindi, per avere una bassa incertezza occorre osservare per un lungo intervallo di tempo.

Se la frequenza che si sta misurando varia nel tempo, occorre in genere che il tempo di misura sia breve, e quindi l'accuratezza della misura è limitata.

Spesso nei segnali in misura sono presenti più frequenze. In tal caso è utile l'analizzatore di spettro, uno strumento che mostra lo spettro di potenza³⁵ del segnale.

Ecco un elenco di frequenze interessanti:

cosa	frequenza (Hz)	tipo
battito cardiaco	~1	biologico
infra-suoni	< 16	acustico
suoni	16↔20000	"
La3 (nota musicale)	440	"
ultrasuoni	> 20000	"
corrente alternata (Europa)	50	elettrico
corrente alternata (Stati Uniti)	60	elettrico
Onde Radio	<3G	elettro-magnetico
LF (onde lunghe)	30k↔300k	elettro-magnetico
MF (onde medie)	300k↔3M	elettro-magnetico
HF (onde corte)	3M↔30M	elettro-magnetico
VHF (radio MF, televisione)	30M↔300M	elettro-magnetico
UHF (televisione, telefonini)	300M↔3G	elettro-magnetico
Microonde	3G↔300G	elettro-magnetico
Infrarossi	300G↔428T	elettro-magnetico
Luce visibile	428T↔749T	elettro-magnetico
Ultravioletti	749T↔30P	elettro-magnetico
Raggi X	30P↔300P	elettro-magnetico
Raggi Gamma	>300P	elettro-magnetico

³⁵ Lo strumento fa la trasformata di Fourier del segnale e ne mostra il modulo quadro. Per una definizione di trasformata di Fourier e spettro di potenza, si faccia riferimento ai corsi successivi (per esempio in <http://grwavs.f.roma1.infn.it/sp/SP.pdf>)

20 – Misure di lunghezze

Introduzione

Come l'astronomia si sviluppò soprattutto per la costruzione dei calendari, così la geometria (e in seguito la trigonometria, piana e sferica) si sviluppò per la misura di lunghezze, aree e volumi. Le unità di misura di lunghezza facevano riferimento per lo più al corpo umano (talora a quello del re). Così si aveva il pollice, il palmo, il piede³⁶, il cubito (la lunghezza dell'avambraccio dal gomito alla punta del dito medio), il passo, la tesa (la massima estensione delle braccia aperte; in Inglese fathom). Per le distanze stradali si usava il miglio, pari a 1000 passi, o lo stadio.

Unità di misura

L'unità di misura di lunghezza del Sistema Internazionale è il metro. Il termine fu coniato da Tito Livio Burattini, cartografo italiano del 600, che nel suo libro "Misura Universale", seguendo idee già diffuse in quel tempo, propose una unità di misura, che, usando la derivazione greca dell'espressione "misura universale", chiamò "metro cattolico"; essa era pari alla lunghezza del pendolo di semi-periodo 1 secondo, di lunghezza circa 1 metro, che era quello comunemente usato negli orologi. Successivamente si pensò di legare l'unità di misura "universale" alle dimensioni della Terra e nel 1790-91 una commissione dell'Accademia delle Scienze francese propose di utilizzare come unità di misura di lunghezza la 40-milionesima parte del meridiano terrestre passante per Parigi e di usare la base 10 per i multipli e i sottomultipli³⁷. A questo scopo due astronomi, Jean-Baptiste Delambre e Pierre Mechain furono inviati, uno a sud e uno a nord, per misurare, tramite accurate triangolazioni, la distanza lungo il meridiano passante per Parigi, tra Dunkerque e Barcellona. La spedizione durò ben 7 anni, dal 1792 al 1799, nella Francia sconvolta dalla Rivoluzione.

Le misure furono fatte usando due campioni dello standard allora in uso dall'Accademia, la "tesa del Perù" (di circa due metri) e si trovò un valore per il meridiano che è circa 0.15 % più grande del valore vero. Furono poi prodotti dei campioni di platino.

Vogliamo ricordare che la prima "misura" del meridiano fu fatta da Eratostene, oltre 200 anni avanti Cristo. Egli, supponendo che le due città egiziane di Alessandria e Siene (l'attuale Assuan) fossero sullo stesso meridiano (in realtà sono a circa 3 gradi di differenza), misurò la distanza D tra di esse (in stadi; uno "stadio" era circa 160 metri) e quindi, osservando che a Siene il giorno del solstizio estivo il sole era quasi perfettamente verticale al mezzogiorno, misurò la lunghezza dell'ombra di un palo ad Alessandria in quel giorno e quindi poté valutare la differenza α di latitudine in gradi tra le due città e trovò la circonferenza della Terra (che supponeva perfettamente sferica), come $360 \cdot D / \alpha$. La misura ottenuta (250000 stadi, circa 40000 chilometri) è molto vicina al valore "vero" (circa 40041 km), anche se, per il metodo usato, l'incertezza dovrebbe essere almeno del 5 %.

³⁶ Ovviamente queste grandezze avevano valori diversi in diversi posti: per esempio in Italia il piede "agrimensorio" andava dai 29.8 cm di Roma (vicini ai 31.6 anglosassoni), ai 54.5 cm di Parma (!).

³⁷ Questo progetto di razionalizzazione coinvolgeva tutte le grandezze fisiche. Tra l'altro fu proposto anche la divisione dell'angolo retto in 100 "gradi".

L'unità di misura proposta dall'Accademia francese fu in seguito accettata da vari paesi europei³⁸. Nel 1875 fu firmata a Parigi la “Convenzione del Metro” tra alcuni paesi europei. Essa istituì il Bureau International des Poids et Mesures (BIPM)³⁹, a Sèvres, vicino Parigi.

Successivamente, nel 1889, per sopravvenute esigenze di maggiore precisione, fu costruito il “metro campione”, in una lega di platino-iridio, conservato al BIPM, e di cui furono fatte varie copie, “campioni secondari”.

Nel 1893 Albert A. Michelson mise a punto una tecnica di misura, utilizzando l'interferenza della luce, per misurare il metro campione in numero di lunghezze d'onda di particolari righe spettrali della luce e propose di sostituire il campione di Sevres con uno standard legato alla luce emessa da atomi.

Ciò avvenne solo nel 1960, quando il metro venne definito come la lunghezza di 1650763.73 lunghezze d'onda della linea di emissione arancione-rossa del kripton-86.

Infine nel 1983 si arrivò all'attuale definizione, legata alla definizione di secondo e alla velocità della luce, definita costante:

- Il metro è la lunghezza percorsa dalla luce nel vuoto in 1/299792458 s.

Con ciò l'unità di misura della lunghezza è diventata dipendente da quella di tempo e quindi l'accuratezza del campione dipende dalla precisione di misura del tempo.

Mostriamo ora una tabella che indica la riduzione nel tempo dell'incertezza sulla misura del metro:

Anno	Metodo	Accuratezza relativa
1799	Meridiano terrestre	$\pm 6 \times 10^{-5}$
1889	Prototipo in platino-iridio	$\pm 2 \times 10^{-6}$
1960	Lunghezza d'onda della radiazione del kripton	$\pm 7 \times 10^{-9}$
1983	Velocità della luce	$\pm 7 \times 10^{-10}$
2008	idem	$\pm 2 \times 10^{-11}$

³⁸ Napoleone nel 1812 ritornò alle vecchie unità, ma il metro rimase in uso nei Paesi Bassi; esso fu poi reintrodotta in Francia nel 1840.

³⁹ Attualmente comprende 51 stati membri e 26 associati; non ne fa parte (2008), per esempio, il Perù, che ha dato il nome all'unità di misura da cui è poi nato il metro.

Ordini di grandezza delle lunghezze

lunghezza di Planck	1.6×10^{-35} m
dimensione di un quark	10^{-18} m
dimensione di un protone	10^{-15} m
dimensione di un nucleo atomico	10^{-14} m
lunghezza d'onda dei raggi gamma	10^{-12} m
raggio dell'atomo di idrogeno	2.5×10^{-11} m
1 Angström (raggi atomici)	10^{-10} m
diametro dell'elica del DNA	2×10^{-9} m
dimensioni di un virus	10^{-8} m
lunghezza d'onda della luce	$3.8 \div 7.4 \times 10^{-7}$ m
dimensione di un batterio	$1 \div 10 \times 10^{-6}$ m
spessore di un capello	8×10^{-5} m
altezza media persona adulta	1.7 m
altezza delle più alte costruzioni umane	500 m
altezza dell'Everest	8850 m
un grado di latitudine terrestre	111×10^3 m
diametro della Luna	3.48×10^6 m
diametro equatoriale terrestre	6.40×10^6 m
distanza Terra-Luna	3.84×10^8 m
diametro del Sole	1.39×10^9 m
distanza Terra-Sole	1.50×10^{11} m
1 anno-luce	9.46×10^{15} m
distanza della stella più vicina (Proxima Centauri)	3.99×10^{16} m
diametro della Via Lattea	10^{20} m
distanza dalla galassia di Andromeda	2.23×10^{22} m
distanza dall'ammasso della Vergine	10^{23} m
distanza percorsa dalla luce dal Big Bang	1.37×10^{26} m

Note

La lunghezza di Planck è la più semplice combinazione di costanti fondamentali della Fisica che dia una lunghezza. È data da

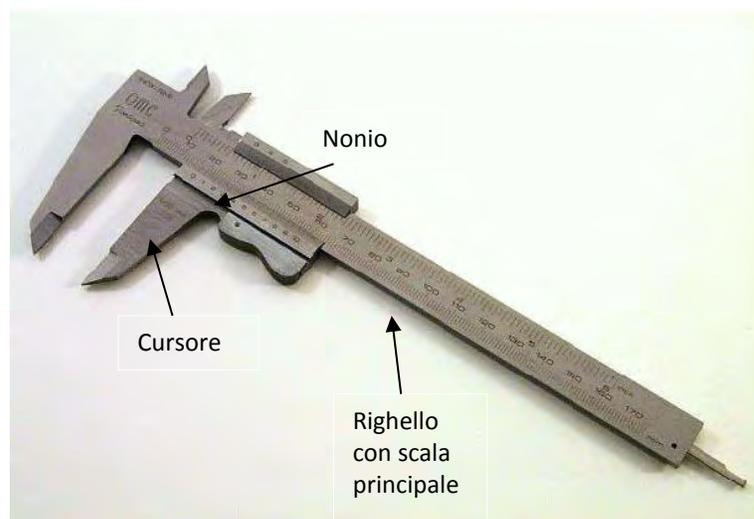
$$(20.1) \quad \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$$

dove \hbar è la costante di Planck ridotta, G la costante gravitazionale e c la velocità della luce. È considerata l'unità "naturale" di lunghezza.

Alcuni strumenti di misura di lunghezze

Calibro a cursore

Un tipico calibro a cursore è illustrato in figura:



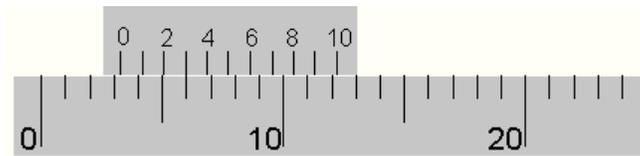
Esso è costituito da un righello base con una scala principale in millimetri ed un cursore, di costruzione molto accurata. In genere i calibri sono realizzati in acciaio inossidabile. Con un calibro di questo genere possono misurarsi distanze fino a un massimo di una ventina di centimetri, con una sensibilità di $1/10$ di mm o anche superiore. In genere i calibri a cursore sono equipaggiati con un “nonio”, uno con cui si riescono a fare misure con una accuratezza di $1/20$ mm (o anche più).



Il nonio⁴⁰, dal nome del suo inventore, il matematico portoghese Pedro Nunes (1502-1578), funziona tramite una seconda scala, incisa sul cursore, con 10 divisioni in 9 mm (nonio decimale) o 20 in 19 mm (nonio ventesimale) o 40 in 39 mm (nonio quarantesimale). Le due scale, quando il calibro è chiuso, hanno i due 0 coincidenti. Lo 0 del cursore viene quindi usato per fare misure “approssimate” al millimetro. Per avere la frazione di mm, si vede quale è la “tacca” del cursore che coincide con una tacca del righello base: questa tacca del cursore indica la frazione di millimetro.

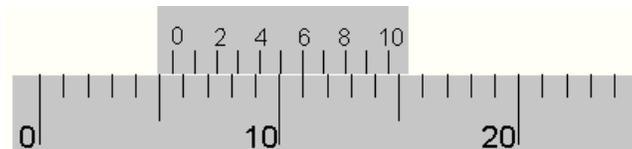
Facciamo un esempio:

⁴⁰ Fu in seguito perfezionato da Pierre Vernier, per cui talora viene chiamato “verniero”.



si vede che lo 0 del nonio si trova tra 3 e 4 mm, mentre la tacca superiore che coincide con una inferiore è quella relativa al 3: quindi si sta misurando 3.3 mm.

Ecco un altro esempio:



Lo 0 si trova tra 5 e 6 mm. La tacca del nonio che coincide con una tacca inferiore è il 6, quindi la misura è 5.6 mm.

Esistono oggi calibri a cursore a lettura digitale (vedi figura), con sensibilità di 0.01 mm.



I calibri sono tarati per lavorare ottimalmente a 20 gradi. Per temperature differenti, per misure di grande accuratezza, va tenuto conto della dilatazione termica (vedi tavola in appendice).

Micrometro Palmer

Il micrometro, detto anche calibro Palmer⁴¹, è uno degli strumenti che si basa sull'uso della vite micrometrica.



Una vite micrometrica è una vite⁴² con filettatura di grande precisione e di grande qualità. Alla testa della vite è fissata una scala graduata. Se il passo della filettatura è di mezzo millimetro, e la scala graduata ha 50 divisioni, si ha la sensibilità di 0.01 mm.

Per misure di questa sensibilità una particolare attenzione va fatta al serraggio: una maggiore o minore pressione sul campione da misurare può dar luogo a misure sensibilmente differenti. A questo scopo nel micrometro il serraggio finale va fatto con la frizione dinamometrica posta all'estremità, che sfrutta un meccanismo di ruota libera.

La lettura va fatta su due scale: la scala "grossa", sull'asse della vite micrometrica, con la sensibilità di (tipicamente) 0.5 mm, e la scala fine, sulla "testa" della vite micrometrica, che indica la frazione del mezzo millimetro.

Va preventivamente controllata l'eventuale presenza di "fuori zero" (offset), controllando che le due scale diano 0 quando il micrometro è completamente "chiuso". Se è presente un offset, va sottratto dalle successive misure (e va fatto correggere dai tecnici).

Anche i micrometri sono oggi realizzati con lettura digitale:



Un tale strumento ha una sensibilità di 1 μm (1 micron).

⁴¹ Dal nome del francese J.-L. Palmer, che lo inventò nel 1848.

⁴² La vite fu inventata dal matematico tarantino Archita nel 400 a.C. e ampiamente usata nell'antichità nella costruzione di torchi (la vite era di legno). La diffusione delle viti metalliche accompagnò, dal XVIII secolo, la rivoluzione industriale.

Ricordiamo che maggiore è l'accuratezza dello strumento, maggiore deve essere la nostra cura nel maneggiarlo e custodirlo e nel tener conto della temperatura e del serraggio.

Misure con ultrasuoni o con laser

Misure di distanza possono farsi con sistemi che emettono un segnale, sonoro, elettromagnetico o luminoso, verso il “bersaglio” di cui si vuole misurare la lontananza, e ne misurano il tempo a cui ritorna l'eco. È questo il principio del radar⁴³ e del sonar.

La distanza è semplicemente il prodotto tra la metà del tempo di ritorno dell'impulso e la velocità del segnale.

Incertezza su questa misura è in genere dovuta soprattutto a due cause: alla non precisa definizione del punto di riflessione e a variazioni non sempre calcolabili della velocità del segnale nell'aria (dovute a variazioni di densità e/o temperatura).

Bisogna notare che la misura effettuata va attribuita al tempo medio tra il tempo di partenza e il tempo di arrivo del segnale.

⁴³ Inventato nel 1941, durante la seconda guerra mondiale, in Gran Bretagna. È un acronimo per RAdio Detection and Ranging.

Metodo della triangolazione e misure di angoli

Il metodo della triangolazione per misurare grandi distanze fu introdotto nel XVI secolo dal matematico e cartografo olandese Gemma Frisius⁴⁴. Con esso si può calcolare una distanza tra la nostra posizione e un oggetto lontano senza raggiungerlo.

Si consideri il triangolo ABC, e siano α e β i due angoli adiacenti la base AB. Si voglia calcolare la distanza tra A e C che si suppone lontano e/o inaccessibile. Avendo posto $\gamma = 180 - \alpha - \beta$, ricordiamo che

$$(20.2) \quad \frac{\sin \alpha}{BC} = \frac{\sin \beta}{AC} = \frac{\sin \gamma}{AB}$$

allora, avendo misurato la base AB e i due angoli, si ha

$$(20.3) \quad AC = \frac{AB \cdot \sin \beta}{\sin(180 - \alpha - \beta)}$$

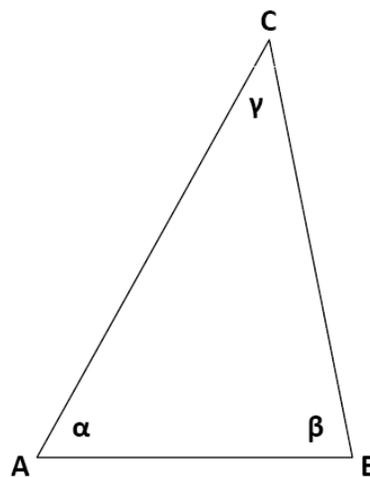
L'angolo $\gamma = 180 - \alpha - \beta$ è detto angolo di parallasse. Il metodo della triangolazione si usa sia per misurare distanze terrestri che per misurare la distanza di stelle "vicine", col cosiddetto **metodo della parallasse**⁴⁵, usando in genere come base il diametro dell'orbita terrestre (circa 300 milioni di chilometri).

Per misurare gli angoli sulla superficie terrestre si usa il teodolite, schematicamente un piccolo cannocchiale montato su due cerchi graduati, uno orizzontale e uno verticale. Questo strumento fu introdotto, nella configurazione moderna, nel XVIII secolo, quando Jesse Ramsden costruì la sua raffinata "macchina a dividere" (dividing engine) con cui riusciva a costruire scale graduate circolari con l'accuratezza del secondo d'arco.

Ecco un teodolite dell'inizio dell'800 e uno di oggi:



Gemma Frisius (1508-1555)



⁴⁴ Tra l'altro costruì raffinati strumenti e propose anche il metodo di calcolo della longitudine basato sull'uso di un preciso orologio (che fu praticamente realizzato 200 anni dopo).

⁴⁵ Legata a questo metodo di calcolo delle distanze stellari è la definizione di una unità di misura di lunghezza molto usata per indicare le distanze astronomiche: il parsec (abbreviato **pc**), definita come la distanza di una stella che vede il raggio medio dell'orbita terrestre sotto un secondo d'arco. Esso equivale a circa 3.08×10^{16} [m](#).



L'accuratezza di un teodolite può essere di circa 1 secondo d'arco.

Spesso le misure con il teodolite vengono fatte con la *stadia* (o mira), un'asta graduata della lunghezza in genere di un paio di metri: in questo caso il vertice del triangolo della figura precedente è dato dal teodolite, che quindi non deve essere spostato per una seconda misura, mentre la base è la stadia.

Col teodolite si fanno anche misure di dislivelli.

Per quanto riguarda le misure angolari celesti, vogliamo ricordare il satellite artificiale Hipparcos⁴⁶, lanciato dall'Agenzia Spaziale Europea nel 1989. Questo satellite ha eseguito la precisa determinazione della posizione di 120 000 stelle con l'accuratezza di 2~4 milli-arcosecondi e di oltre un milione con una accuratezza circa 10 volte inferiore.

La livella a bolla può essere vista come un particolare strumento di misura di angoli; essa è normalmente usata per controllare (e misurare) la pendenza di una superficie rispetto al piano orizzontale. Le livelle si dividono in sferiche (bi-assiali) e toroidali (mono-assiali). Il liquido usato è in genere l'etanolo, per la sua bassa viscosità. L'accuratezza della misura della pendenza è circa 1/10000 (per una livella di 20 cm, si può misurare un dislivello di 0.02 mm, circa 1/5 di un foglio di carta extra-strong), corrispondente a circa 0.006 gradi. La livella fu inventata nel 600 dal francese Melchisédech Thévenot e successivamente perfezionata.



⁴⁶ Il nome è un acronimo: **H**igh **P**recision **P**arallax **C**ollecting **S**atellite, ma ispirato al nome dell'astronomo greco Ipparco di Nicea, vissuto nel secondo secolo a.C., che, con le sue accurate osservazioni, scoprì il fenomeno della precessione degli equinozi.

Misura della velocità

La velocità di un corpo è una grandezza vettoriale ed è definita come la derivata dello spostamento rispetto al tempo.

$$(20.4) \quad \vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

Essa può valutarsi facendo il rapporto tra la differenza tra due posizioni a due tempi diversi e la differenza dei tempi

$$(20.5) \quad \vec{v}' = \frac{\vec{s}(t_2) - \vec{s}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{s}_2 - \vec{s}_1}{t_2 - t_1}$$

Questa misura è valida se la velocità non varia nell'intervallo $\{t_1, t_2\}$, altrimenti abbiamo la velocità media. Per ridurre questo problema occorre ridurre l'intervallo di osservazione, ma questo peggiora l'incertezza. Per vederlo, analizziamo l'incertezza. Per semplicità supponiamo che il moto sia rettilineo, lungo la coordinata x , così da analizzare un'equazione scalare.

$$(20.6) \quad v' = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Siano Δx e Δt le incertezze sullo spostamento e il tempo. Abbiamo

$$(20.7) \quad \begin{aligned} \Delta v &= \sqrt{2 \cdot \left| \frac{\Delta x}{t_2 - t_1} \right|^2 + 2 \cdot \left| \frac{\Delta t \cdot (x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)^2} \right|^2} \approx \\ &\approx \sqrt{2 \cdot \left| \frac{\Delta x}{t_2 - t_1} \right|^2 + 2 \cdot \left| \frac{\Delta t \cdot v}{t_2 - t_1} \right|^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \sqrt{2 \cdot (\Delta x^2 + v^2 \cdot \Delta t^2)} \end{aligned}$$

Come si vede, l'incertezza sulla velocità è inversamente proporzionale alla larghezza dell'intervallo temporale di osservazione.

Questo metodo di calcolo della velocità è quello utilizzato dai sistemi basati sul GPS: calcolando successivamente due posizioni e sapendo i tempi a cui corrispondono queste posizioni, si può calcolare la velocità.

Misure basate sull'effetto Doppler

L'effetto Doppler⁴⁷ si manifesta in connessione a fenomeni di propagazione ondosa, quando la sorgente dell'onda è in moto rispetto a un rivelatore (o ricevente) dell'onda; questo effetto è analogo, qualsiasi sia la natura del fenomeno ondoso, sia per esempio acustica, sia elettromagnetica, ma è diverso quantitativamente.

Nel caso acustico, se il moto della sorgente rispetto al rivelatore è caratterizzato dalla velocità v_s , e se la sorgente genera un'onda monocromatica di frequenza f , il ricevente osserva un'onda di frequenza

$$(20.8) \quad f' = \left(\frac{v}{v \pm v_s} \right) \cdot f$$

dove v è la velocità dell'onda (nel mezzo); il segno $-$ vale se la sorgente è in avvicinamento, il segno $+$ se è in allontanamento.

Se è il ricevente che si muove rispetto alla sorgente con velocità v_o , allora si ha

$$(20.9) \quad f' = f \cdot \left(1 \pm \frac{v_o}{v} \right)$$

dove ora il segno $+$ vale per ricevente che si muove verso la sorgente e il $-$ nel caso di ricevente che si muove in direzione opposta alla sorgente.

Nel caso elettromagnetico in prima approssimazione, per velocità della sorgente o del ricevente molto minori della velocità della luce, la situazione è analoga, ma la formula corretta è

$$(20.10) \quad f' = f \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

dove c è la velocità della luce e v è la velocità relativa tra sorgente e osservatore (calcolata positiva quando la distanza tra i due cresce). Si noti che in questo caso c'è perfetta simmetria tra sorgente e ricevente, cosa che non c'era per le onde sonore.

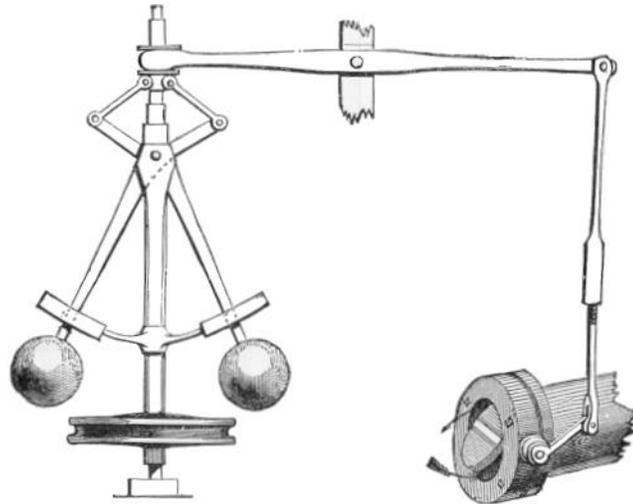
L'effetto Doppler può essere utilizzato per misurare la velocità di un corpo. A questo scopo occorre inviare il segnale ondulatorio verso il corpo e osservarne l'eco: supponendo di essere noi in quiete rispetto al mezzo (per il caso sonoro), questo avrà una frequenza spostata secondo la legge data sopra.

⁴⁷ Scoperto dal fisico austriaco Johann Christian Andreas Doppler (1803-1853).

Tachimetri

Un tachimetro è uno strumento in grado di fare una misura diretta di velocità. Questi sistemi funzionano sui veicoli a ruote e sono in pratica dei frequenzimetri collegati alla rotazione delle ruote.

Il più antico tachimetro di questo tipo fu inventato nel 1788⁴⁸ da James Watt (1736-1819), come parte essenziale della sua macchina a vapore: esso aveva la funzione di regolare il flusso del vapore, mantenendo costante la velocità.



Servo-motore di Watt

Misura dell'accelerazione

La misura dell'accelerazione di un corpo può farsi osservando da un sistema inerziale il moto del corpo o collegando solidamente al corpo un accelerometro, che altro non è che una massa collegata a un dinamometro che misura la forza apparente su di essa, causata dall'accelerazione. Rimandiamo quindi alle misure di forza.

⁴⁸ In effetti sistemi simili erano in uso già nel secolo precedente nei mulini.

II GPS

Il Global Positioning System (GPS) è un sistema di posizionamento basato su satelliti artificiali, realizzato e gestito dal Dipartimento della Difesa degli Stati Uniti. Con esso attualmente si riesce a conoscere la posizione su un qualsiasi punto della superficie terrestre con l'incertezza di 15 m.

Il GPS è nato con scopi militari; la “costellazione” di 24 satelliti, necessaria per coprire globalmente il pianeta, è stata completata nel 1994 e inizialmente il servizio fu aperto agli usi civili degradando il segnale in modo da ridurre la precisione (a circa ± 100 m). Questa pratica è stata dismessa dal 2000.

Successivamente sono stati lanciati altri satelliti (attualmente ne sono in funzione 31) e si sono messi a punto sistemi per migliorare ulteriormente la precisione del posizionamento (fino a meno di 1 m).

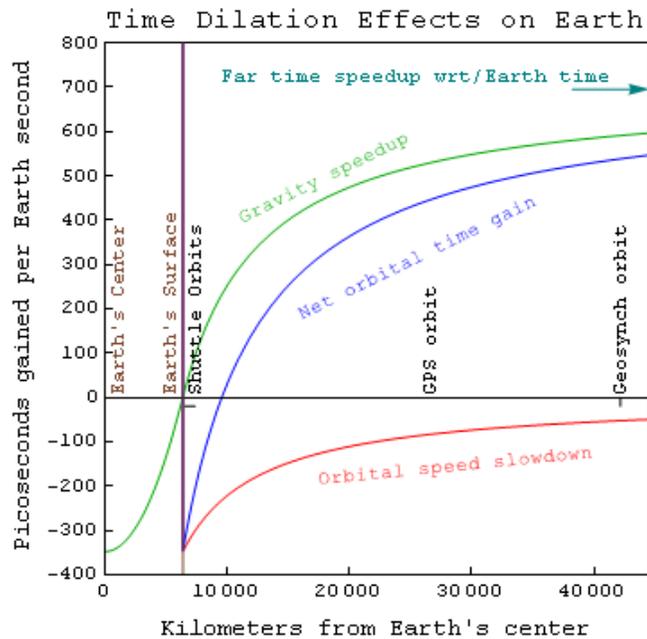
I satelliti, che orbitano su 6 piani orbitali ad una altezza di 20200 km, sono seguiti da varie stazioni di controllo a terra. Essi trasmettono continuamente la loro posizione e il tempo in cui questa posizione è stata raggiunta.

Il segnale viene ricevuto e decodificato da appositi ricevitori. Dal segnale di almeno 4 satelliti (o meglio dalla differenza temporale di arrivo del segnale di almeno 4 satelliti) si riesce a ricavare la posizione del ricevitore. Se il ricevitore si trova sulla superficie della Terra, bastano i segnali di 3 satelliti.



Tipico modulo per ricevitore GPS, basato sul chipset SiRF Star III, usato in molti prodotti.

Ogni satellite ha a bordo un orologio atomico di alta precisione. Si noti che, a causa degli effetti relativistici, il tempo a bordo del satellite scorre più velocemente (in effetti, come mostra la figura sotto, solo per gli effetti della relatività speciale si avrebbe un rallentamento di 7.2 μ s al giorno, mentre per gli effetti solo della relatività generale si avrebbe un'accelerazione di 45.9 μ s e quindi in totale si ha un'accelerazione di 38.7 μ s. L'orologio atomico di bordo è stato perciò appositamente rallentato quando era a Terra: invece che “battere” a 10.23 MHz, lo si è fatto battere a 10.22999999543 MHz.



L'Unione Europea ha varato un progetto per un sistema di posizionamento satellitare chiamato Galileo. A questo progetto hanno in seguito aderito anche altre nazioni. Il motivo principale è quello di affrancarsi dalla dipendenza della gestione militare statunitense, che potrebbe in qualsiasi momento dismettere il servizio per motivi politici o militari⁴⁹.

Il nuovo progetto si basa su 30 satelliti su 3 orbite, a 23222 chilometri di altezza; di questi 27 sono operativi e 3 di riserva. Per l'errore di posizione vanno considerate due modalità di utilizzo: quello gratuito, che dovrebbe permettere un errore inferiore ai 4 m orizzontali ed 8 verticali, e quello commerciale (a pagamento) che dovrebbe permettere l'accuratezza nella posizione inferiore ai 10 cm (!). Dovrebbero essere implementati anche altri servizi di utilità civile.

Il progetto è partito ufficialmente nel 2003. Fin'ora (2008) sono stati lanciati dei satelliti di test.



⁴⁹ Ci sono attualmente anche altri progetti. In particolare il sistema GLONASS parzialmente realizzato dalla Russia e i sistemi proposti da India, Cina e Giappone.

I sistemi di posizionamento satellitare possono essere utilizzati non solo per determinare la posizione sulla Terra, ma anche a misurare la distanza tra due punti e a misurare la velocità del ricevitore.

Molto utile è la “disseminazione” del tempo, eseguita dal sistema GPS con grande precisione (< **50 ns** attualmente) e a basso costo. Con questo sistema, cioè, si può sincronizzare un orologio ovunque posto sulla Terra con la precisione di 50 miliardesimi di secondo.

21 - Misura di masse

Introduzione

La massa di un corpo indica la quantità di materia contenuta in esso ed operativamente è definita⁵⁰ dalla seconda legge della dinamica

$$(21.1) \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

dove il vettore \vec{F} è la forza applicata al corpo, m la massa e \vec{a} l'accelerazione che il corpo acquista per l'applicazione di questa forza.

Spesso la massa viene confusa col peso, che in Fisica definisce la forza con cui una massa è attratta dalla forza gravitazionale della Terra; e spesso le bilance “rozze” misurano il peso.

Se tra le due grandezze, massa e peso, c'è in prima approssimazione una proporzionalità, data dalla legge, ricavata dalla seconda legge della dinamica sopra riportata,

$$(21.2) \quad P = m \cdot g$$

qui P indica il peso e g l'accelerazione di gravità. P e g sono indicati come scalari, e non come vettori, perché prendiamo solo la componente verticale (la verticale⁵¹ viene definita come la direzione della forza peso).

In effetti il valore di g varia con la latitudine φ e con l'elevazione h in questo modo:

$$(21.3) \quad g = 9.780327 \cdot (1 + 0.0053024 \cdot \sin^2 \varphi - 0.0000058 \cdot \sin^2 2\varphi - 0.0000003155 \cdot h) \text{ m / s}^2$$

h è l'elevazione rispetto al “geoide” di riferimento (il modello matematico semplificato della superficie terrestre). Si noti che questa formula non è valida nel caso degli altopiani, nel qual caso g aumenta rispetto alla formula data (anomalia di Bouguer).

A parte la variazione con la latitudine, che porta g dal valore di circa 9.78 all'equatore a circa 9.83 al polo, con una variazione di circa 5 parti per mille, la variazione con l'elevazione dà una variazione di circa una parte per milione per ogni 3 metri.

Quindi, se si usa una bilancia sensibile al peso, questa va calibrata nel luogo d'uso, se vogliamo misure di buona accuratezza.

Un altro problema, quando si misura la massa è la spinta di Archimede, dovuta al fatto che la misura viene effettuata in aria.

⁵⁰ La massa inerziale. Il Principio di Equivalenza stabilisce l'eguaglianza (o meglio, la proporzionalità) tra massa inerziale e massa gravitazionale (quella che entra nella legge di gravitazione di Newton). Una discussione approfondita sulla definizione rigorosa di massa, come delle altre grandezze fisiche, esula dagli scopi di questo corso.

⁵¹ Per un dato luogo la verticale varia leggermente nel tempo, per varie cause, di cui la principale sono le maree dovute alla Luna e al Sole. Si noti che la direzione della verticale non è in genere quella del centro della Terra.

Infatti, come è noto, ogni corpo immerso in un fluido (come l'acqua o l'aria) riceve una spinta verso l'alto pari al peso del fluido spostato.

Ciò significa, in pratica, che

- se usiamo un dinamometro per la misura (cioè un misuratore di forza peso), misuriamo una massa che è inferiore alla massa effettiva per un valore pari al prodotto tra il volume del corpo e la densità⁵² dell'aria $V_{\text{corpo}} \cdot \rho_{\text{aria}}$
- se usiamo una bilancia a comparazione di pesi (vedi in seguito la “bilancia classica”), misuriamo una massa inferiore o superiore a quella giusta di un valore pari alla differenza di densità tra il corpo e i pesi moltiplicato per il volume del corpo.

La bilancia può essere corretta per un particolare valore della densità del corpo in misura, ma in genere va attentamente corretta la misura se si vuole una buona accuratezza. Ricordiamo che la densità dell'aria è 0.001293 g/cm^3 , quindi l'errore è in genere dell'ordine di alcune parti per mille.

Unità di misura

L'unità di misura della massa, nel SI, è il **chilogrammo**.

Originariamente (nel 1795, quando fu introdotto per legge dal governo francese) era definito come la massa di un decimetro cubo di acqua pura alla temperatura del ghiaccio fondente (che è il punto di maggiore stabilità di temperatura), ma già quattro anni dopo venne cambiata la temperatura di riferimento a $3.98 \text{ }^\circ\text{C}$, dove, a pressione atmosferica standard, l'acqua ha la massima densità e quindi questo è il punto di massima stabilità della densità.

Dal 1889 venne definito come la massa del prototipo in platino-iridio, conservato presso il Bureau International des Poids et Mesures a Sèvres, alla periferia di Parigi.

La definizione dell'unità di misura di massa è quindi rimasta l'unica legata ad un singolo oggetto materiale. Dal prototipo sono stati fatti vari campioni secondari e mandati nei paesi membri dell'accordo internazionale.



Il chilogrammo campione

Si stima che la costruzione dei campioni sia stata fatta con l'errore di $2 \mu\text{g}$. Periodicamente i vari campioni sono confrontati con l'originale e così si è verificato che la differenza tra di essi cresce col tempo. Si è valutato perciò che il campione primario abbia perso finora circa $50 \mu\text{g}$. La causa di ciò non è nota, ma è chiaro che l'uso del campione di massa non è del tutto soddisfacente e si

⁵² La densità di un corpo è il rapporto tra la massa e il volume del corpo.

pensa di sostituirlo con un altro standard, probabilmente legato a un dato numero di atomi di una data specie (si parla di Carbonio-12 o Silicio-28).

Ordini di grandezza della massa

massa del neutrino elettronico	$<10^{-35}$ kg
massa dell'elettrone	9.1×10^{-31} kg
massa del protone	1.67×10^{-27} kg
massa di una molecola d'acqua	$\sim 3 \times 10^{-26}$ kg
massa di un virus	$\sim 10^{-20}$ kg
massa equivalente di 1 joule	1.1×10^{-17} kg
massa di un batterio (Escherichia Coli)	$\sim 6.6 \times 10^{-16}$ kg
massa di una cellula umana	$\sim 10^{-12}$ kg
incertezza nella massa del chilogrammo campione	2×10^{-9} kg
massa di Planck	2.2×10^{-8} kg
massa di un granello di sabbia	$\sim 1 \times 10^{-6}$ kg
massa di una zanzara	$1 \sim 2 \times 10^{-6}$ kg
massa della piramide di Cheope	6×10^9 kg
produzione mondiale di petrolio nel 2001	3.9×10^{12} kg
massa di un tipico asteroide	1.2×10^{17} kg
massa dell'atmosfera terrestre	5×10^{18} kg
massa totale degli oceani	1.3×10^{21} kg
massa della Luna	7.35×10^{22} kg
massa della Terra	5.97×10^{24} kg
massa di Giove	1.9×10^{27} kg
massa del Sole	1.99×10^{30} kg
massa del buco nero al centro della Via Lattea	2×10^{36} kg
massa visibile della nostra galassia	3.6×10^{41} kg
massa totale della nostra galassia	2×10^{42} kg
massa critica dell'universo	2×10^{52} kg
massa osservabile dell'universo	3×10^{52} kg

Note

La massa di Planck è la più semplice combinazione di costanti fondamentali della Fisica che dia una massa. È data da

$$(21.4) \quad \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

dove \hbar è la costante di Planck ridotta, G la costante gravitazionale e c la velocità della luce. È considerata l'unità "naturale" di massa.

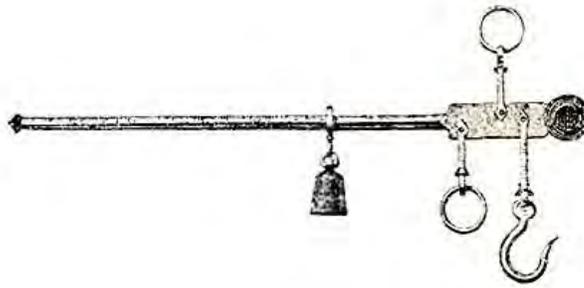
Le bilance

La bilancia è probabilmente il più antico strumento di misura ancora in uso. In Egitto sono state trovate testimonianze archeologiche di bilance antecedenti al 2500 a.C..

Una bilancia “classica” è, come è noto, composta da due “piatti” uguali sospesi simmetricamente a una sbarra (i “bracci” della bilancia): si pone la massa incognita su uno dei piatti, mentre sull’altro si mettono dei “pesi” di massa nota finché non si raggiunge l’equilibrio: si deduce allora che la massa incognita è pari alla somma delle masse dei pesetti.

Le bilance di questo tipo sono “strumenti di zero”, cioè in cui la misura viene fatta confrontando due grandezze della stessa specie, variandone una finché non sia identica all’altra.

I Romani introdussero la stadèra, ancora in uso nei mercati rionali fino alla fine dello scorso secolo, che è un’applicazione del principio della leva⁵³. In essa si usa un singolo peso noto e l’equilibrio si raggiunge variandone la posizione sul braccio:



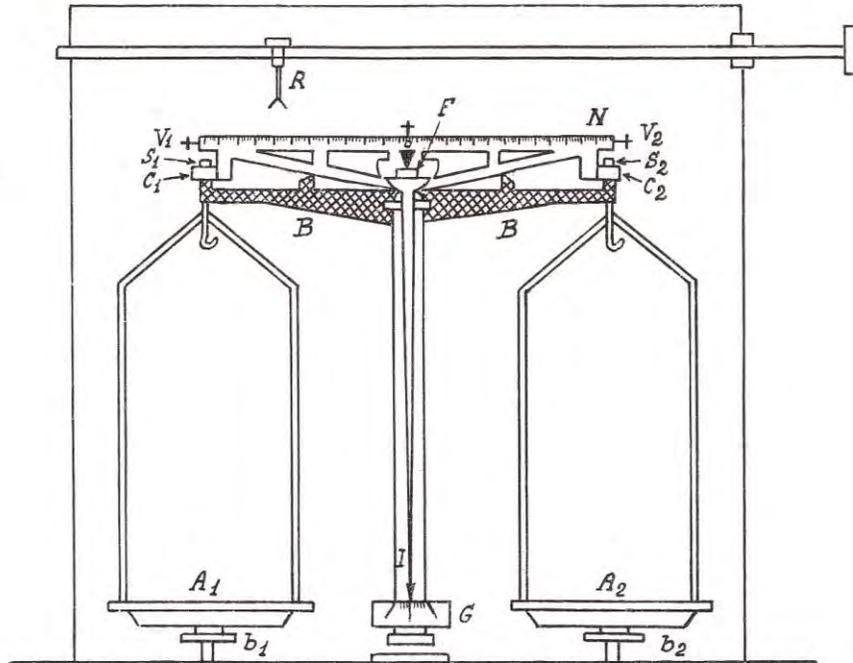
La bilancia “classica” di precisione

Vogliamo descrivere i principi costruttivi della bilancia di precisione, uno degli strumenti più importanti che hanno accompagnato lo sviluppo della Fisica e della Chimica negli ultimi due secoli.

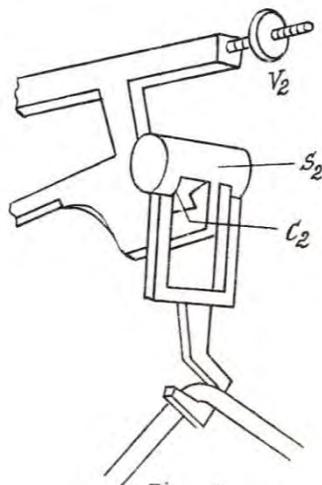
Questo è lo schema di una bilancia di precisione⁵⁴:

⁵³ L’uso della stadèra da parte dei Romani precedette di un paio di secoli la “scoperta” della leva da parte di Archimede: uno dei tanti esempi di come la teoria arriva in genere dopo la pratica.

⁵⁴ Gli schemi, come parte della descrizione, sono presi da Ettore Pancini “Misure e Apparecchi di Fisica”, ed. Veschi, V ediz., 1965



Il fulcro F della bilancia è costituito dallo spigolo di un coltello d'acciaio appoggiato su un piano molto duro (per esempio agata) e orizzontale. Intorno ad esso può ruotare il giogo MN della bilancia. Il giogo deve avere massima leggerezza e massima rigidità. Ai suoi estremi, per mezzo di altri due coltelli C_1 e C_2 appoggiati su due piani di agata, sono appesi i due piatti A_1 e A_2 . Un particolare di questo montaggio è mostrato nel seguente schema:



Grande cura è posta nella costruzione della bilancia affinché gli spigoli dei tre coltelli siano paralleli e che la costruzione abbia la massima simmetria, in particolare le distanze tra i due coltelli laterali e quello centrale siano uguali.

La bilancia dispone di un sistema di blocco costituito dalla sbarra BB, che solleva i coltelli dai piani di agata, e dai pistoncini b_1 e b_2 , che sollevano i piatti: ciò permette di caricare con delicatezza i piatti e di non tenere sotto sforzo le parti delicate della bilancia quando non è in uso.

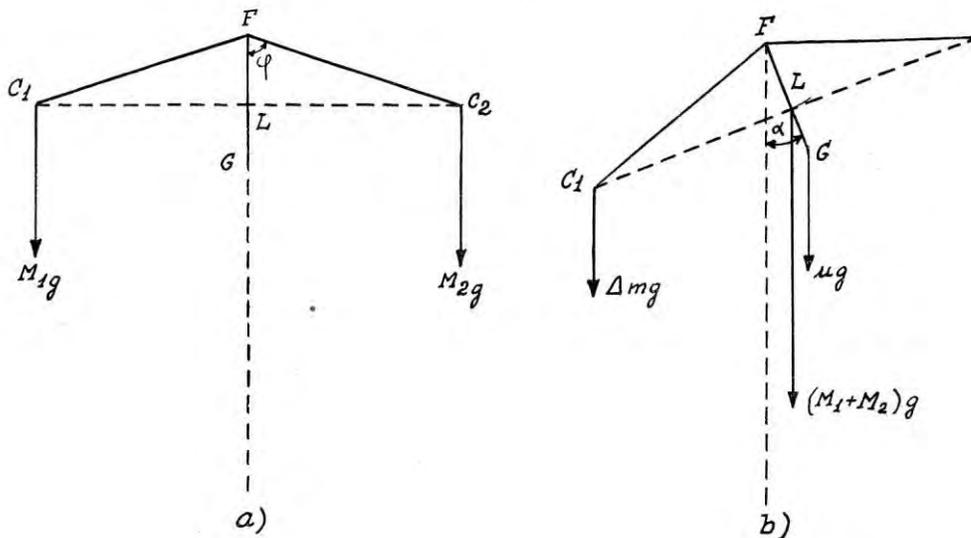
Quando la bilancia è in (lenta e piccola) oscillazione, il movimento dei piatti è essenzialmente verticale. Se le oscillazioni non sono smorzate (bassissimo attrito), è facile vedere, con l'indice I affacciato su una scala graduata che ne indica l'angolo rispetto alla verticale, quali sono i due punti della loro massima elongazione e quindi calcolare il centro di oscillazione.

Se occorre equilibrare perfettamente la bilancia, possono utilizzarsi le due viti V_1 e V_2 .

Una bilancia deve essere innanzitutto precisa, deve cioè dare la stessa risposta se si ripete la misura. A questo scopo è importante che siano ridotti gli attriti e, soprattutto, che il "filo" dei coltelli sia parallelo: se questa condizione non è verificata, la misura può dipendere dalla posizione dei pesi sui piatti. E in effetti non si riesce a verificarla in modo soddisfacente, quindi dobbiamo sempre porre i pesi con molta cura al centro dei piatti.

Per ricavare la sensibilità della bilancia calcoliamo la condizione di equilibrio nel caso di una bilancia "perfetta" (perfetta simmetria di costruzione).

Se, nella bilancia perfettamente equilibrata con l'indice sullo 0, poniamo sul primo piatto il sovraccarico Δm , abbiamo una nuova posizione di equilibrio, identificata dall'angolo α , data da (vedi figura)



$$(21.5) \quad (M_1 + M_2) \cdot g \cdot \delta \cdot \sin \alpha + \mu \cdot g \cdot d \cdot \sin \alpha - \Delta m \cdot g \cdot l_1 \cdot \sin(\varphi - \alpha) = 0$$

dove

$$\delta = FL, \quad d = FG, \quad C_1F = l_1$$

e g è l'accelerazione di gravità, G è il baricentro del giogo e L il punto di applicazione della risultante delle due forze $M_1 \cdot \vec{g}$ e $M_2 \cdot \vec{g}$.

Poiché α e Δm sono molto piccole, e posto $M_1 = M_2 = M$ e $l_1 = l_2 = l$,

$$(21.6) \quad \frac{\alpha}{\Delta m} = \frac{1}{\mu \cdot d + 2 \cdot \delta \cdot M}$$

Prima dell'uso, si può tarare la bilancia, per calcolare sperimentalmente i valori $\mu \cdot d$ e δ , facendo delle prove con varie masse.

Per quanto riguarda l'accuratezza della misura, bisogna che i due bracci L_1 e L_2 (distanze tra i coltelli laterali e quello centrale) siano per quanto possibile uguali. Ricordiamo che per l'equilibrio, con l'indice della bilancia sullo 0, si deve avere equilibrio tra i due momenti torcenti

$$(21.7) \quad L_1 \cdot M_1 = L_2 \cdot M_2$$

Ora, se si vuole avere una sensibilità relativa di, per esempio, una parte su un milione, la differenza tra L_1 e L_2 deve essere di una parte su un milione, e poiché i bracci sono tipicamente di circa 10 cm, essi dovrebbero avere una differenza di circa $0.1 \mu\text{m}$, il che è praticamente impossibile da realizzare.

Per superare questa difficoltà si usano due metodi:

- il **metodo della doppia pesata**, in cui si eseguono due pesate, una in cui si pone sul piatto destro la massa incognita e sull'altro i pesetti e un'altra in cui le posizioni sono invertite: si prende quindi semplicemente la media delle due misure. Infatti si può dimostrare che in prima approssimazione questa procedura annulla l'errore sistematico.
- il **metodo della tara**, in cui si pone su un piatto della bilancia il corpo di massa incognita e sull'altro un altro oggetto di massa leggermente superiore (la "tara"); quindi si mette la bilancia in equilibrio con dei pesetti. Si toglie quindi il corpo da pesare e si pongono al suo posto dei pesetti in modo da riportare l'equilibrio. È evidente che il valore dei pesetti aggiunti dà la massa dell'oggetto incognito, ed è indipendente da piccole differenze nelle lunghezze dei bracci. Basandosi su questo metodo di misura sono state costruite bilance con un singolo braccio.

Una particolare attenzione va tenuta nella costruzione, nella conservazione e nella manipolazione dei pesetti. Si noti che in genere non sono disponibili pesetti più piccoli di 10 mg, e quindi per misure più raffinate si usa il cosiddetto cavalierino, un pesetto di 10 mg che viene posto sulla parte graduata del giogo, in posizione intermedia in modo tale da equilibrare la bilancia al 0.1 mg.

Ed ecco una di queste bilance (dal Museo del Dipartimento di Fisica della Sapienza):



“Questa bilancia di ottone, di 2 kg di portata, è conservata in una custodia di legno con cristalli, cassetti per gli accessori e due manopole di controllo per sbloccare e regolare la posizione dei piatti. La base della bilancia è dotata di livella e scala millimetrata. La struttura del giogo, di grande eleganza e funzionalità, è tale da consentire alta rigidità dei bracci e al tempo stesso la loro massima mobilità. Tre viti per lato regolano la posizione dei coltelli rispetto ai piatti.

L' esemplare è forse identificabile con la bilancia di precisione menzionata in "Le scienze e le arti sotto il pontificato di Pio IX", nella presentazione del Museo di Fisica del 1857, e impiegata nelle operazioni di definizione del Sistema dei pesi e misure degli Stati Pontifici.

La sua grande sensibilità (0,5 mg su 2 kg, pari a 2,5 su 10^7) consentiva di misurare in laboratorio la variazione dell'accelerazione di gravità con la quota secondo il metodo di von Jolly. A tale scopo il fondo della custodia veniva rimosso, in modo da sospendere al di sotto del piatto di sinistra, con un dislivello h, un piatto ausiliario.

Disposta la bilancia in prossimità del soffitto del laboratorio con il piattello ausiliario in prossimità del pavimento, si carica ciascun piatto con una massa di circa 2 kg in modo da raggiungere l'equilibrio. Si trasferisce poi la massa dal piatto di sinistra sul piatto ausiliario al di sotto. Dalla massa aggiuntiva posta sul piatto di destra per ristabilire l'equilibrio, nota h, si può risalire alla variazione percentuale della forza peso (dell'ordine di 10^{-6}).

La bilancia è riportata nel Registro inventariale del Regio Istituto Fisico con il numero I-27.”

(M. Grazia Ianniello)

La bilancia analitica digitale

Anche la tecnologia della costruzione delle bilance, e in particolare delle bilance di precisione, è molto cambiata in seguito alla “rivoluzione” digitale.

Una moderna bilancia analitica raggiunge (e talora supera) la sensibilità di una vecchia bilancia di precisione, ad un prezzo molto minore e con una ben maggiore facilità d’uso.

Il sensore che trasforma la forza peso in un segnale elettrico che viene poi amplificato, convertito in un segnale digitale e quindi elaborato per dare poi il risultato della misura è un estensimetro (in inglese *strain gauge*).

Poiché il sensore è sensibile alla forza peso, che, come abbiamo visto, varia con la latitudine e l’altezza sul livello del mare, la bilancia va tarata prima dell’uso, nel luogo dove viene usata. Ciò in genere viene fatto automaticamente all’accensione dello strumento e, poiché il sensore varia la sua risposta anche dipendentemente dalla temperatura, anche per ogni sensibile variazione della temperatura ambiente. Nei modelli più sofisticati viene anche ricontrollata la linearità dello strumento (anche della conversione analogico/digitale), cioè che la misura dell’insieme delle due masse M_1 e M_2 dia il valore $M_1 + M_2$.

Queste tarature vengono eseguite con l’utilizzo di masse campione interne, ma è buona norma rifare la calibrazione con masse esterne molto affidabili.

Ecco una tipica bilancia analitica elettronica:



Queste bilance hanno in genere una portata massima di 2~3 etti e una sensibilità di 0.1 mg o anche 0.01 mg.

Ecco la sintesi delle caratteristiche di 4 tipici modelli di bilancia analitica:

5.2 Specifiche tecniche

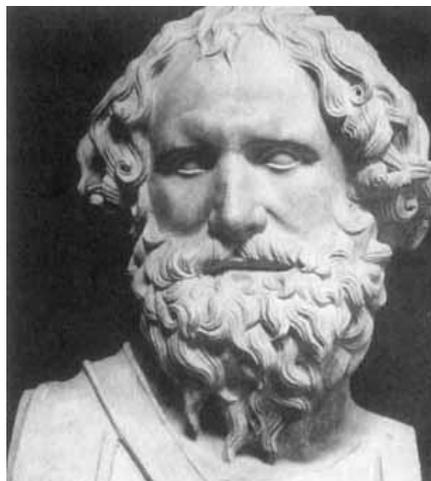
Modello	DV114C	DV214C	DV314C	DV215CD
Capacità	110	210	310	81/210
Leggibilità (mg)	0,1			0,01/0,1
Ripetibilità (Dev Standard) (mg)	0,1		0,2	0,02/0,1
Linearità (mg)	±0,2		±0,5	±0,03/0,2
Unità di peso	mg, g, oz, ct, dwt, ozt, GN, toel (3), momme, unità personalizzata			
Modalità d'applicazione	Pesa, conteggio parti, pesa percentuale, controllo pesa, pesa di animali / pesa dinamica, G/N/T, somma totale picco di densità, statistiche di densità, pipetta			
Funzioni	Interfaccia RS232, Protocollo GLP, Gancio per pesa da sotto integrale, Impostazioni ambientali regolabili, indicatore di livello			
Intervallo di tara	A capacità per sottrazione			
Tempo di stabilizzazione (s)	4		8	12/5
Deriva di sensibilità (10-30 °C)	±2ppm/°C			
Temperatura di funzionamento	Da 10 a 40 °C / da 50 a 104 °F			
Taratura	Automatica, interna e manuale esterna			
Requisiti di alimentazione	Adattatore esterno, 100-120 VCa 1 A, 220-240V ca 1 A, 50/60 Hz Configurazione della presa per USA, Europa, Regno Unito, Giappone e Australia			
Tipo di display	Display LCD alfanumerico retroilluminato a 2 righe con Prompt di testo			
Dimensioni del display (pollici/cm)	4 x 1 / 10 x 2,5			
Dimensioni del vassoio (diametro) (pollici/cm)	3,5/9			
Altezza libera sul vassoio (pollici/cm)	9,5/24			
Dimensioni Largh. x Alt. x Prof. (pollici /cm)	7,9 x 11,8 x 18 / 20 x 30 x 45,7			
Peso netto (lb/kg)	22,5/10,2			

Misura della densità

La densità è il rapporto tra la massa e il volume di un corpo. Questo parametro ha grande importanza soprattutto per i corpi di materiale omogeneo (e senza cavità interne).

Si narra che Archimede (Siracusa, 287-212 a.C.) scoprì, mentre faceva il bagno in una vasca, un metodo per determinare la densità di un corpo (in particolare una corona che il tiranno Gerone supponeva non essere d'oro) calcolandone il volume dall'innalzamento dell'acqua quando era immerso: contento per la scoperta, uscì nudo correndo per le vie della città gridando "Eureka!" ("Ho trovato!").

Per fare una misura di densità, occorre perciò fare una misura della massa e una del volume del corpo: ma mentre la misura della massa in genere non comporta problemi particolari, quella del volume può essere non banale (o meglio affetta da notevole incertezza).



Archimede

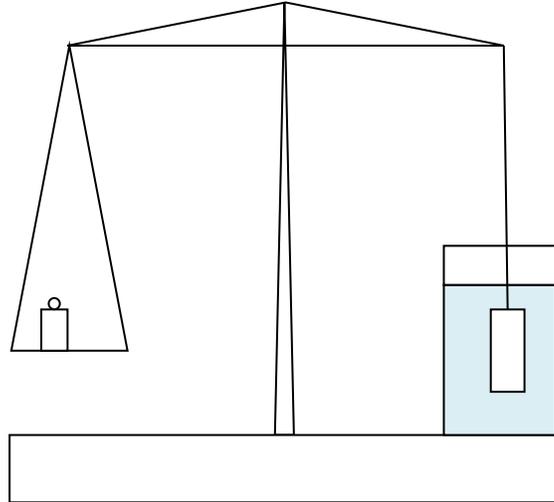
Nel caso di una sostanza solida possiamo misurare il volume con uno dei seguenti metodi:

- misura geometrica del volume, possibile solo nel caso di corpi con geometrie particolarmente semplici, per esempio a forma cilindrica o di parallelepipedo
- misura della variazione del livello del liquido in cui il corpo è stato immerso; questo metodo non è in genere molto accurato
- misura della massa del liquido spostato dal corpo immerso (se di densità superiore di quella del liquido)

Vogliamo illustrare meglio quest'ultimo metodo, che in genere è il più conveniente. Ricordiamo il principio di Archimede:

“Un corpo parzialmente o totalmente immerso in un liquido riceve una spinta verso l'alto pari al peso del volume di liquido occupato”.

Quindi, se pesiamo il corpo prima in aria e poi immerso (totalmente) nel liquido (vedi figura), dalla differenza possiamo ricavare il volume del corpo e quindi la densità. Il procedimento cosiddetto della **bilancia idrostatica**, fu appunto inventato da Archimede.



Trascurando la densità dell'aria (il che comporta l'introduzione di un errore sistematico di circa l'1 ‰ che può correggersi), si ha che il volume è dato da

$$(21.8) \quad V = \frac{m - m'}{\rho_{liq}}$$

dove m è la massa misurata senza immersione, m' la massa “apparente”, misurata con l'immersione, e ρ_{liq} la densità del liquido usato (dipende dalla temperatura e dal grado di purezza: per acqua bidistillata a 20 °C, abbiamo circa 998.2 kg/m³). Quindi la densità del corpo ignoto è data da

$$(21.9) \quad \rho = \rho_{liq} \cdot \frac{m}{m - m'}$$

e quindi se si usa acqua, la densità relativa (a quella dell'acqua) è semplicemente $\frac{m}{m - m'}$.

Per corpi di densità inferiore al liquido, il “peso” del corpo totalmente immerso sarebbe negativo: si può ricorrere a vari “artifici”, come quello di appesantire il corpo con opportuni pesetti (di cui poi si tiene conto) o agganciare il corpo ad una struttura rigida che lo tiene sommerso e misurare il peso “negativo”, cioè la forza che lo spinge verso la superficie.

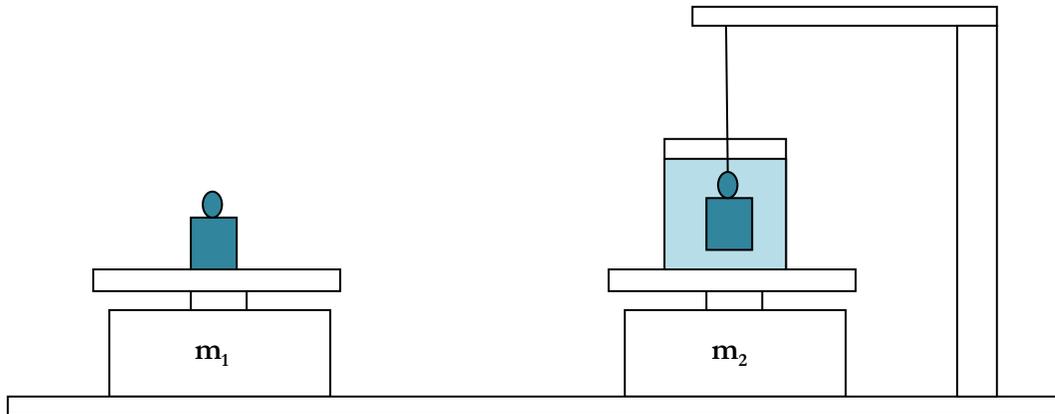
Se si ha una semplice bilancia elettronica, un semplice modo di calcolare la densità per un corpo più denso dell'acqua è il seguente:

- si pesa il corpo, ottenendo il valore m_1
- si pone un recipiente con acqua sulla bilancia e si azzera la misura, quindi si immerge tramite un sottile filo il corpo in esame, senza farlo toccare sul fondo; la bilancia misurerà la massa dell'acqua spostata m_2 , cioè la “spinta di Archimede” (contemporaneamente il sostegno del corpo “sente” un peso minore della stessa quantità); in altri termini la bilancia in questo caso

ci dà una misura (“diretta”) del volume del corpo in unità di massa diviso la densità dell’acqua (se l’unità è il grammo e la densità dell’acqua è assunta pari a 1 g/cm^3 , l’indicazione della bilancia in grammi indica i cm^3 del volume del corpo).

- la densità relativa è

$$(21.10) \quad \rho = \frac{m_1}{m_2}$$



Misura della densità con la bilancia elettronica

Per calcolare la densità di un liquido, invece, basta misurare, con la medesima procedura, la massa “apparente” m' di un corpo, di densità maggiore di quella del liquido, di noto volume V e nota massa m . Si ha

$$(21.11) \quad \rho_{liq} = \frac{m - m'}{V}$$

Per il calcolo della densità di un liquido si usano anche apparecchi particolari, come il densimetro e il picnometro. Il primo si immerge nel liquido e si legge direttamente la densità sulla scala graduata emersa, il secondo si usa in combinazione con una bilancia analitica, eseguendo misure di massa da vuoto, pieno di acqua e pieno del liquido di densità ignota: la densità relativa sarà data da

$$(21.12) \quad \rho_x = \frac{m_x - m_0}{m_A - m_0}$$

dove m_x è la massa col liquido, m_A la massa con acqua e m_0 la massa a vuoto.

Per la misura della densità si usano anche strumenti particolari come il picnometro (per la misura della densità di materiali polverizzati) e il densimetro (per la misura della densità di liquidi).



Picometro



Densimetro

22 - Misura di forze

Introduzione

In Fisica il termine forza designa l'interazione tra due o più corpi. La forza è una grandezza vettoriale, quindi definita da un valore assoluto, una direzione, un verso ed un punto di applicazione. Più forze, se applicate allo stesso punto, si sommano tra loro vettorialmente.

Una definizione operativa dinamica di forza è data dalla seconda legge di Newton

$$(22.1) \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

dove la forza \vec{F} , applicata al punto materiale di massa m , ne causa l'accelerazione \vec{a} . Quindi per misurare (dinamicamente) una forza occorre applicarla a un corpo di massa nota, non sottoposto ad altre forze ed osservarne l'accelerazione. Questo tuttavia raramente è un metodo di misura pratico.

La misura statica di una forza si fa in genere utilizzando uno strumento (il dinamometro) che si basa sulla legge di Hooke. La legge di Hooke, così chiamata dal suo scopritore, Robert Hooke (1635-1703, contemporaneo e grande rivale di Newton), definisce i sistemi elastici come quelli in cui si ha proporzionalità tra lo spostamento (o l'allungamento) e la forza (*Ut tensio, sic vis* era l'espressione latina usata da Hooke che rappresentava questa proporzionalità), cioè, in una forma adatta alla dinamica del punto,

$$(22.2) \quad \vec{F} = -k \cdot \vec{x}$$

dove \vec{F} è la forza e \vec{x} è lo spostamento del punto a cui è applicata la forza; il segno meno indica che la forza ha la stessa direzione, ma verso opposto a quello dello spostamento: la forza elastica tende ad annullare lo spostamento dalla "posizione di equilibrio".

La misura della forza quindi può farsi indirettamente misurando lo spostamento.

Un dinamometro collegato a una massa è in grado di misurare le forze apparenti su questa, causate da accelerazioni.

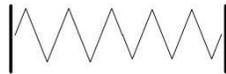
La molla e il dinamometro

Al fine di avere un dinamometro con un'alta sensibilità $s = \left| \frac{dx}{dF} \right| = \frac{1}{k}$, occorre avere un k molto piccolo. Ciò viene realizzato tramite una molla⁵⁵.

Una molla è un oggetto elastico che, sottoposto a una forza, subisce una forte deformazione. Essa immagazzina energia meccanica che può in seguito rilasciare. Ce ne sono di moltissimi tipi, in genere di forma elicoidale, in acciaio. Ci sono molle che “lavorano” in compressione, in tensione o in torsione, di forma cilindrica o piatte, come quelle usate nei bilancieri degli orologi.

Sono caratterizzate da vari parametri, di cui il più importante è la costante elastica k .

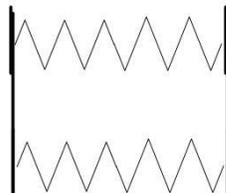
Se abbiamo più molle, possiamo metterle in serie o in parallelo, ottenendo una nuova molla con un nuovo coefficiente elastico. In figura sono fatti alcuni esempi di disposizione di molle eguali:



Costante k



2 in serie
Costante $k/2$



2 in parallelo
Costante $2k$

In generale, se abbiamo due molle di costante k_1 e k_2 , se le mettiamo in parallelo, abbiamo una nuova molla di costante $k = k_1 + k_2$, se le mettiamo in serie si ha $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ ovvero $k = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$.

Si noti che due molle eguali in serie sono equivalenti a una molla della stessa fattura delle due, ma di lunghezza doppia, quindi se si vuole fare una molla “sensibile” basta farla abbastanza lunga. Questo però può creare problemi pratici, quindi per avere sensibili dinamometri si usano diverse metodologie.

⁵⁵ Si può usare anche un elastico, un cordoncino o una fettuccia in genere realizzato con elastomeri, come il caucciù, ma in genere questa soluzione ha qualità inferiori per i cambiamenti delle caratteristiche del materiale nel tempo.

L'oscillatore armonico

Consideriamo il seguente schema:



In esso è rappresentata una massa connessa a una molla, fissata verticalmente ad un supporto. La massa è sottoposta alla forza peso e alla forza elastica della molla, entrambe verticali, ma di direzione opposta (la forza peso verso il basso, la forza elastica verso l'alto). Supponiamo di poter trascurare la massa della molla.

L'equazione che descrive questo sistema si ricava da $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$ e da $\vec{F} = -k \cdot \vec{x}$, dove m è la massa appesa, \vec{g} l'accelerazione di gravità, \vec{x} l'allungamento della molla dalla sua posizione "a riposo" (scarica) e k la costante elastica della molla, una costante che caratterizza la "rigidità" della molla. Eguagliando le due forze, e eliminando il segno di vettore poiché consideriamo solo la componente verticale (le altre sono nulle), abbiamo

$$(22.3) \quad \hat{x} = \frac{m \cdot g}{k}$$

quindi, se è noto k , dalla misura \hat{x} dello spostamento possiamo calcolare⁵⁶ la forza peso $m \cdot g$.

In questa condizione di equilibrio la forza totale sulla massa è nulla, ma se spostiamo di poco verticalmente la massa, la forza elastica non è in equilibrio con la forza peso e infatti è sottoposta alla forza

$$(22.4) \quad F - m \cdot g = k \cdot (\hat{x} - x)$$

o, posto $\Delta x = x - \hat{x}$ e $\Delta F = F - m \cdot g$,

$$(22.5) \quad \Delta F = -k \cdot \Delta x$$

che è di nuovo la legge di Hooke, rispetto al nuovo punto di equilibrio.

Possiamo quindi scrivere, per il moto della massa quando è fuori dall'equilibrio, supponendo che non siano applicate altre forze alla massa,

⁵⁶ Se conosciamo g e k , possiamo ricavare m (equazione della bilancia dinamometrica); se conosciamo m e k , possiamo calcolare g (equazione del gravimetro); se poi conosciamo m e g , possiamo ricavare il k della molla.

$$(22.6) \quad m \cdot \ddot{x} + k \cdot (x - \hat{x}) = 0$$

È questa l'equazione dell'oscillatore armonico, che ha come soluzione generale

$$(22.7) \quad x(t) - \hat{x} = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

dove la pulsazione della sinusoidale è $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, mentre A e φ sono parametri liberi. Si vede che abbiamo una nuova relazione che coinvolge m e k e che possiamo utilizzare, facendo una misura di $\omega = 2\pi \cdot \nu = \frac{2\pi}{T}$, dove ν è la frequenza dell'oscillazione e T il suo periodo.

Si noti che se k è piccolo (quindi “molla sensibile”), così è anche la frequenza di oscillazione.

Nell'equazione sopra riportata abbiamo trascurato la presenza degli attriti (dell'aria e all'interno della molla). Se si suppone che questi attriti generino delle forze opposte al moto proporzionali alla velocità della massa, possiamo scrivere

$$(22.8) \quad m \cdot \ddot{x} + \beta \cdot \dot{x} + k \cdot (x - \hat{x}) = 0$$

di cui la soluzione è, nel caso di β abbastanza piccolo,

$$(22.9) \quad x(t) - \hat{x} = A \cdot e^{-\frac{\beta}{2m}t} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

con

$$(22.10) \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\beta}{2 \cdot m}\right)^2}$$

quindi si ha come soluzione un'oscillazione smorzata, con una frequenza minore a quella del caso senza attrito. Se il termine in $\beta^2 \geq 4 \cdot k \cdot m$, l'oscillazione scompare e la massa si sposta verso la posizione di equilibrio, con tempi dell'ordine di $\frac{2 \cdot m}{\beta}$. Si dice che l'oscillatore armonico è in condizioni di **smorzamento critico** quando

$$(22.11) \quad \beta^2 = 4 \cdot k \cdot m$$

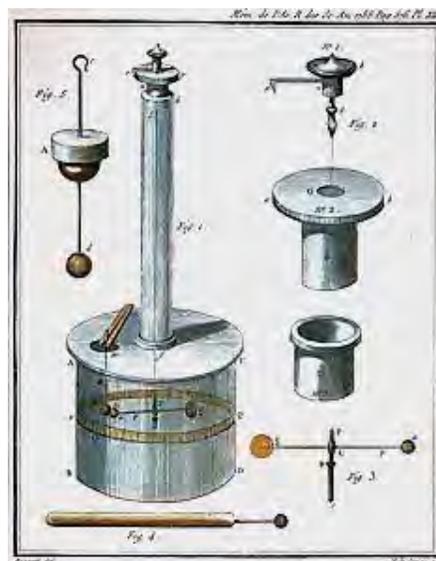
Gli argomenti che abbiamo sviluppato sono di valore ovviamente generale, sono validi cioè per qualsiasi tipo di forza costante applicabile alla massa. Li utilizzeremo per studiare il funzionamento di alcuni dinamometri.

La bilancia di torsione

La bilancia di torsione è uno strumento per la misura di forze molto piccole. Fu inventata nel 1777 da Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806), che la usò per i suoi esperimenti sulle forze elettriche, e, indipendentemente da lui, da John Michell⁵⁷ (1724-1783), nel 1783, e da lui passò, dopo la sua morte, a Henry Cavendish (1731-1810) che la usò per la determinazione della costante gravitazionale e la misura della densità della Terra.



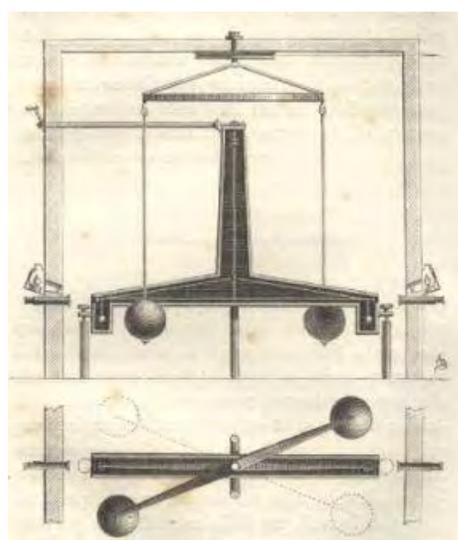
C.-A. Coulomb



La bilancia di torsione di Coulomb



Henry Cavendish

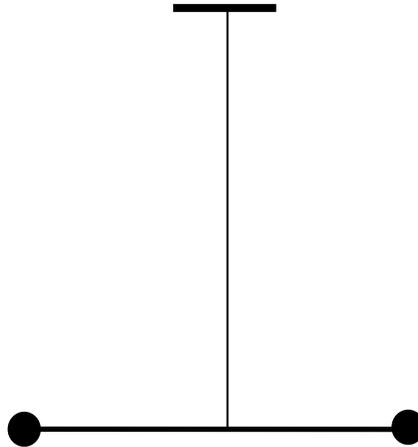


Bilancia di torsione di Michell-Cavendish

La bilancia di torsione è un particolare dinamometro in cui l'elemento elastico è dato dalla torsione di un filo sottile. Tale filo sorregge un bilanciante, costituito da una sbarra di lunghezza $2b$,

⁵⁷ John Michell fu il primo a proporre l'idea di stelle di massa così grande da non far uscire la luce, l'idea dei buchi neri.

ai cui estremi sono poste due masse, e la forza F agisce su una di esse o su entrambe, ortogonalmente alla sbarra.



Nel caso in cui la forza agisce solo su una delle due masse, essa farà ruotare la sbarra di un angolo θ intorno all'asse costituito dal filo verticale; possiamo scrivere

$$(22.12) \quad F \cdot b = -k \cdot \theta$$

che è l'analogo della legge di Hooke nel caso che la forza operi in modo torsionale. k è la costante elastica torsionale (ha dimensioni diverse della costante della molla).

Il problema di valutare k si risolve usando l'equazione dell'oscillatore armonico torsionale

$$(22.13) \quad I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + k \cdot \theta = 0$$

dove I è il momento di inerzia del braccio (di facile calcolo⁵⁸) con le due masse, e quindi, misurando sperimentalmente il periodo di oscillazione T , si ha

$$(22.14) \quad k = \frac{4\pi^2 \cdot I}{T^2}$$

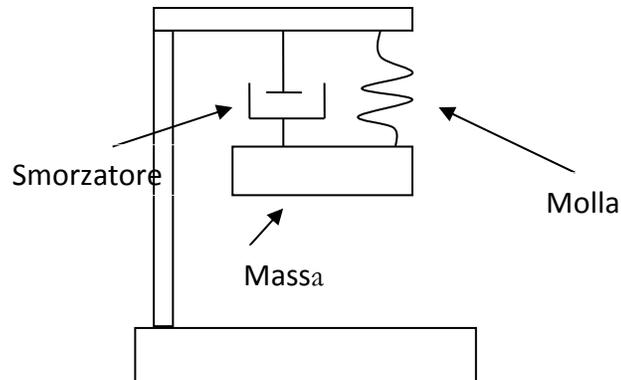
D'altronde si può dimostrare che il k , per un filo di un dato materiale, è proporzionale a $\frac{r^4}{l}$, essendo r il raggio del filo e l la sua lunghezza. Quindi per avere una bilancia di torsione sensibile occorre avere un filo sottile, lungo, ed, ovviamente, resistente.

⁵⁸ Se la bacchetta ha massa m ed è lunga $2R$, mentre le due massette hanno ciascuna massa M , si ha

$$I = \left(\frac{m}{3} + 2 \cdot M \right) \cdot R^2$$

Il sismometro

Il sismometro è uno strumento utilizzato per rivelare le onde sismiche generate dai terremoti, anche molto lontani. Il sensore è una massa connessa ad un sensibile dinamometro che ha la caratteristica di operare in smorzamento critico (vedi il paragrafo sull'oscillatore armonico): ciò perché questo strumento deve dare in uscita un segnale per quanto possibile fedele all'eccitazione sismica e in particolare non deve mostrare risonanze. Lo smorzamento critico garantisce questo, oltre al minimo ritardo di risposta.



Lo smorzatore è un contenitore con dell'olio in cui è immerso un piccolo piatto fissato al sostegno della molla: questo sistema dà solo attrito dinamico.

23 - La misura dell'accelerazione di gravità

L'accelerazione di gravità g , come abbiamo visto, è una grandezza che varia innanzitutto a seconda della latitudine del luogo φ e della sua altezza sul livello del mare h

$$(23.1) \quad g = 9.780327 \cdot (1 + 0.0053024 \cdot \sin^2 \varphi - 0.0000058 \cdot \sin^2 2\varphi - 0.0000003155 \cdot h) \text{ m / s}^2$$

dove h è misurata in metri.

Ulteriori variazioni sono dovute a particolari strutture nel sottosuolo.

Il valore di g , per un dato luogo⁵⁹, inoltre varia nel tempo a causa della presenza delle maree terrestri e di altri fenomeni⁶⁰, comunque lenti, g varia nel tempo.

Per questo sono utili precise misure di g . Queste vengono fatte con strumenti che si basano su vari principi:

- misura diretta dell'accelerazione di gravità, tramite l'osservazione di un corpo in caduta libera. Il metodo più promettente è il seguente: si lancia verso l'alto un corpo e se ne osserva il passaggio a due (o più) diverse quote z_1 e z_2 , in salita e in discesa, ai tempi t_1, t_2, t_3, t_4 (**metodo balistico**).

Essendo z_0 e v_0 la posizione e la velocità di partenza, si ha

$$(23.2) \quad \begin{aligned} z_1 &= z_0 + v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \\ z_2 &= z_0 + v_0 \cdot t_2 - \frac{1}{2} g \cdot t_2^2 \\ z_2 &= z_0 + v_0 \cdot t_3 - \frac{1}{2} g \cdot t_3^2 \\ z_1 &= z_0 + v_0 \cdot t_4 - \frac{1}{2} g \cdot t_4^2 \end{aligned}$$

da cui

⁵⁹ Negli anni 70 fu fatta una precisa misura di g nella stanza N054A del Dipartimento di Fisica (vecchio edificio, nel seminterrato): il valore fu **9.8034923 m/s²**, da confrontare col valore di g riportato sulla Gazzetta Ufficiale (vedi tavola in fondo a questo testo) di **9.80352 m/s²**.

⁶⁰ Particolarmente interessanti sono le oscillazioni libere della Terra, che si possono osservare in concomitanza dei grandi terremoti: in tali occasioni la Terra risuona come un diapason (o meglio, come qualsiasi corpo elastico) a varie frequenze, la più importante delle quali è a circa 54 minuti.

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot z_1}}{g} \\
 t_2 &= \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot z_2}}{g} \\
 t_3 &= \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot z_2}}{g} \\
 t_4 &= \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot z_1}}{g}
 \end{aligned}
 \tag{23.3}$$

e, posto $T_1 = t_3 - t_2$ e $T_2 = t_4 - t_1$, si ha

$$\begin{aligned}
 T_1^2 &= \frac{4 \cdot (v_0^2 - 2 \cdot g \cdot z_1)}{g^2} \\
 T_2^2 &= \frac{4 \cdot (v_0^2 - 2 \cdot g \cdot z_2)}{g^2}
 \end{aligned}
 \tag{23.4}$$

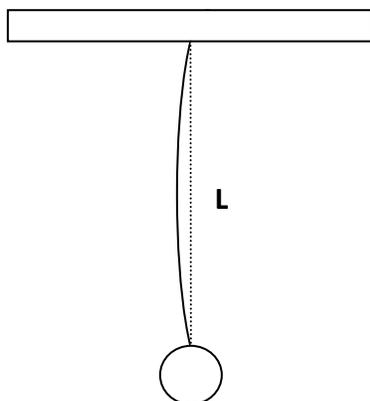
e infine

$$\begin{aligned}
 T_1^2 - T_2^2 &= \frac{8}{g} \cdot (z_2 - z_1) \\
 g &= \frac{8 \cdot (z_2 - z_1)}{T_1^2 - T_2^2}
 \end{aligned}
 \tag{23.5}$$

Si noti che negli strumenti accurati l'equazione riportata non è corretta, perché g varia sensibilmente con la quota z . Quindi occorrono più osservazioni ed elaborare i dati in modo diverso.

Su questo principio si basano i “gravimetri assoluti”, usati per calibrare i gravimetri relativi. Nell'Appendice è illustrato il principio di funzionamento di uno di questi strumenti, l'IMGC-02 realizzato presso l'Istituto di Metrologia “G. Colonnetti” di Torino.

- misura del periodo di un pendolo: vedi il prossimo paragrafo.
- misura della frequenza di risonanza di una stringa “caricata”:



la frequenza è data da

$$(23.6) \quad \nu = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{mg}{\sigma}}$$

dove L è la lunghezza della stringa e σ la sua densità lineare. Su questo principio, proposto da Tomoda nel 1963, si basano i misuratori di gravità usati sulle navi.

- misura dell'allungamento di un dinamometro (e sistemi derivati): vedi paragrafo sul gravimetro.

Si noti che per il **principio di equivalenza**⁶¹ non c'è modo di distinguere localmente tra una accelerazione e un campo gravitazionale e quindi un gravimetro e un sismografo misurano la stessa grandezza: la differenza fondamentale è che il gravimetro ne misura la parte costante o lentamente variabile, il sismografo ne misura la parte "rapidamente" variabile.

In appendice sono riportati i valori dell'accelerazione di gravità per le province italiane, così come sono state pubblicate per decreto sulla Gazzetta Ufficiale del 7 Giugno 1999.

⁶¹ Introdotto da Einstein, ma già noto in una certa forma dai tempi di Galileo.

Misura di g con un pendolo

Ricordiamo che il periodo delle oscillazioni di ampiezza θ_0 di un pendolo semplice (“matematico”) di lunghezza l è dato da

$$(23.7) \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64} \cdot \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right)$$

dove θ_0 è misurato in radianti (e minore di $\frac{\pi}{2}$), e per piccole ampiezze la dipendenza da θ_0 diventa trascurabile (isocronismo delle piccole oscillazioni).

In pratica il pendolo semplice non può essere realizzato e allora dobbiamo considerare il pendolo fisico, cioè un corpo rigido libero di ruotare attorno ad un asse non passante per il centro di massa. Per esso, per le piccole oscillazioni, si ha

$$(23.8) \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

dove I è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, d la distanza tra il centro di massa e l'asse e M la massa totale del corpo. Il pendolo fisico, detto anche pendolo composto, si comporta come un pendolo semplice di lunghezza

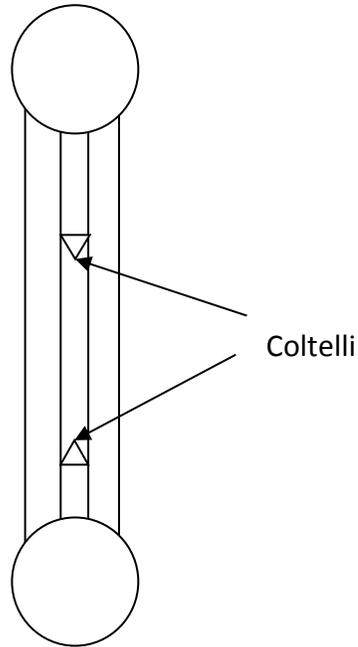
$$(23.9) \quad l_E = \frac{I}{Md}$$

chiamiamo questa lunghezza equivalente del pendolo.

Tuttavia, data la difficoltà di misurare con precisione sia I che d , non è facile ricavare con buona accuratezza la misura di g da misure di periodo del pendolo fisico.

Il fisico inglese Henry Kater, nel 1817, inventò il pendolo reversibile, con cui si risolve il problema. Si tratta di un corpo che può essere appeso tramite due coltelli, la cui posizione si può variare, in due modi diversi.

Eccone lo schema (didattico):



Per illustrarne il funzionamento, ricordiamo innanzitutto il teorema di Huygens-Steiner:

“Il momento d’inerzia rispetto a un asse a, parallelo ad uno c passante per il centro di massa, è pari alla somma del momento d’inerzia rispetto all’asse c e del prodotto della massa totale per la distanza tra i due assi al quadrato.”

Cioè

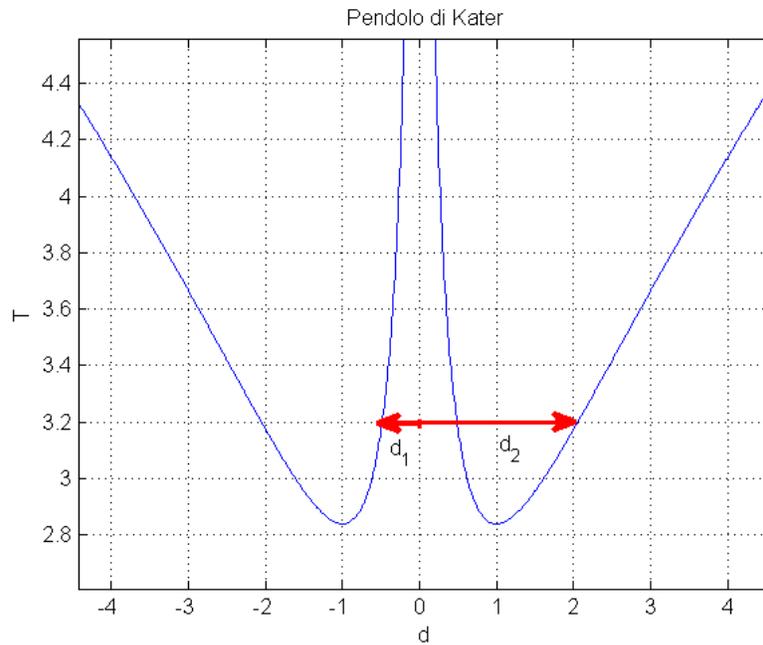
$$(23.10) \quad I_a = I_c + M \cdot d^2$$

essendo M la massa totale e d la distanza tra gli assi a e c. Quindi il periodo è

$$(23.11) \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_a}{Mgd}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_c}{Mgd} + \frac{d}{g}}$$

Al variare di d, ecco l’andamento⁶² di T:

⁶² I parametri scelti per questo grafico, solo esemplificativo, sono 1 kg per m, 1 kg·m² per I_c e 9.8 m/s² per g. T è espresso in s e d in m, misurata dall’asse per il centro di massa.



Si noti che la simmetria della figura non dipende dalla simmetria del pendolo (che non è importante), ma semplicemente per il teorema di Huygens-Steiner, per un dato d , tutti gli assi distanti d dall'asse per il centro di massa scelto sono equivalenti per calcolare il momento d'inerzia e quindi il periodo.

D'altronde, dall'equazione precedente si trova che, fissato il periodo, e quindi la lunghezza equivalente l_E , si ha l'equazione

$$(23.12) \quad M \cdot d^2 - M \cdot d \cdot l_E + I_c = 0$$

e le due soluzioni (positive)

$$(23.13) \quad d = \frac{l_E \pm \sqrt{l_E^2 - 4 \cdot I_c / M}}{2}$$

e quindi la somma delle due soluzioni è $d_1 + d_2 = l_E$.

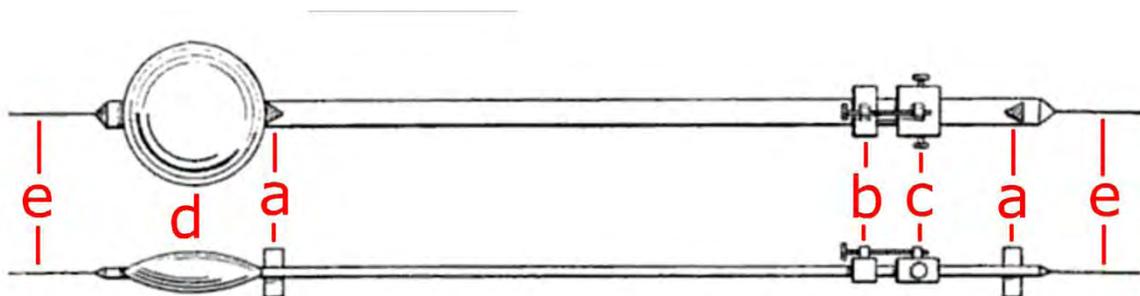
Quindi dalla misura di due posizioni che danno lo stesso periodo si può trovare la lunghezza equivalente e quindi il valore di g come

$$(23.14) \quad g = \frac{4\pi^2 \cdot l_E}{T^2}$$

Ma attenzione! i valori di d non si possono conoscere con precisione, perché è ignota la posizione del centro di massa. Per questo ci è utile la reversibilità del pendolo: infatti misurando un valore di d in un verso e l'altro nell'altro, ci basta misurare la distanza tra i due coltelli per averne la somma.

La misura “assoluta” di g col pendolo di Kater è stato il metodo più accurato fino all’introduzione del metodo balistico. Tra il 1898 e il 1904 presso l’Istituto Geodetico di Potsdam furono fatte da Kühnen e Furtwängler, con un’accuratezza relativa di circa 10^{-5} , e diventarono, nel 1909, il riferimento internazionale (su cui venivano calibrati gli altri gravimetri).

Riportiamo lo schema di un pendolo reversibile “vero” (da William Watson (1920) *A Textbook of Physics*, 7th Ed., Longman's Green & Co., p.127, fig.88 e Wikipedia):



a - coltelli opposti, b – peso di aggiustamento fine, c – peso di aggiustamento grossolano, d – peso, e – indicatori di posizione (per misure angolari).

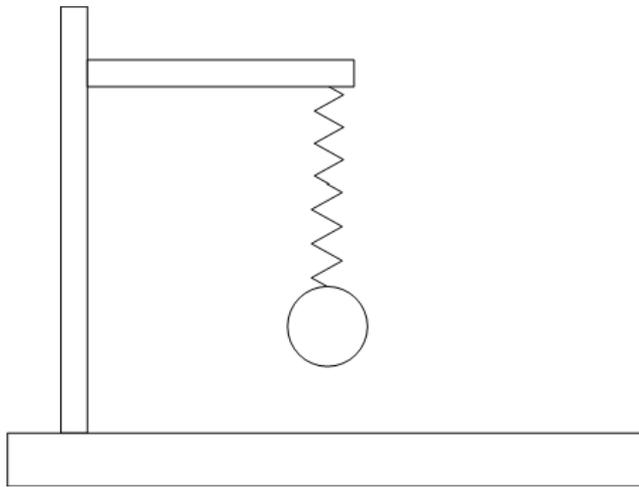
Il gravimetro

I gravimetri si dividono in assoluti e relativi: gli strumenti relativi, per dare una misura assoluta (e non differenziale, che spesso è sufficiente), devono essere tarati con strumenti assoluti. Tuttavia gli strumenti relativi sono in genere di maggiore sensibilità, di minor costo e di più facile operazione.

Il gravimetro è anche uno strumento “in continua”⁶³, cioè uno strumento per misurare una grandezza costante nel tempo:

Vediamo ora vari tipi di gravimetri

In linea di principio il seguente schema funziona da gravimetro:



Si tratta di un semplice dinamometro, “caricato” con una massa sottoposta all’azione del campo gravitazionale terrestre: l’allungamento della molla è proporzionale a g , quindi in linea di principio basta misurare l’allungamento della molla e si ha la misura di g

$$(23.15) \quad g = \frac{k}{m} \cdot (l - l_0)$$

dove m è la massa, k la costante della molla, l_0 la sua lunghezza a riposo, l la lunghezza osservata. La sensibilità è quindi

$$(23.16) \quad \frac{dl}{dg} = \frac{m}{k}$$

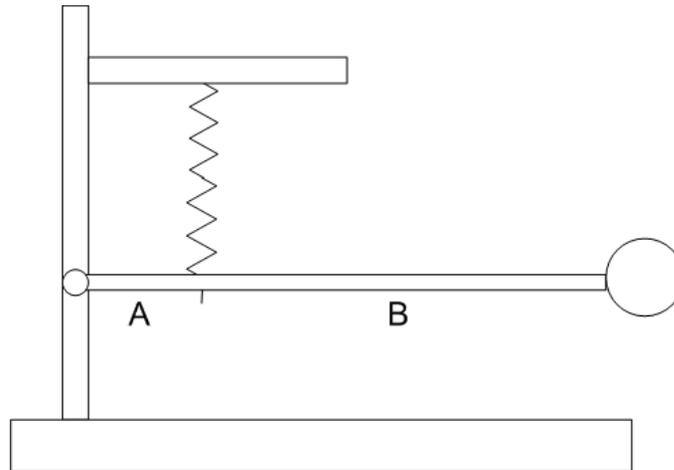
Ricordiamo inoltre che il periodo di oscillazione del sistema è

⁶³ O meglio, uno strumento per bassissime frequenze.

$$(23.17) \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

e quindi la sensibilità è inversamente proporzionale al quadrato di T. Quindi va trovato il modo di aumentare questo periodo. Una strada, poco soddisfacente, è quella di aumentare m e diminuire k, cioè prendere una molla molto “morbida” (e molto lunga).

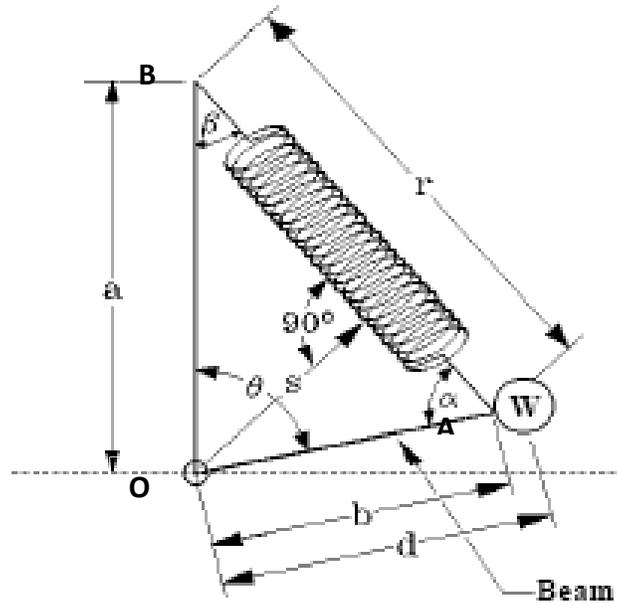
Un'altra strada è quella di trovare un diverso sistema. Per esempio il seguente schema



in questo caso la massa non è connessa direttamente alla molla, ma tramite una leva incernierata su un montante verticale. In tal caso si ha un guadagno in sensibilità dato dal rapporto $\frac{A+B}{A}$.

Nel 1932 Lucien Lacoste, allora studente presso l'Università del Texas a Austin, trovò un sistema migliore. In seguito, insieme al suo professore Arnold Romberg, fondò una compagnia per la costruzione di gravimetri.

Mostriamo il principio di funzionamento del gravimetro Lacoste-Romberg. I veri gravimetri di questo tipo sono ovviamente molto più complessi.



La molla dello schema è una molla ritorta in modo speciale, appositamente inventata da Lucien LaCoste negli anni 30, e chiamata “molla a lunghezza zero” per la sua proprietà di avere (teoricamente) lunghezza 0 se non ci fosse forza applicata. Quindi, nella figura, la forza che oppone la molla ai suoi estremi è esattamente $k \cdot r$.

La sbarra quasi orizzontale OA di lunghezza b è incernierata alla base della sbarra verticale OB di lunghezza a . All'estremo A è posta una massa W . Il momento torcente totale è

$$(23.18) \quad \tau = W \cdot g \cdot d \cdot \sin \theta - k \cdot r \cdot b \cdot \sin \alpha$$

e ricordando che $\sin \alpha = \frac{a}{r} \sin \theta$, si ha

$$(23.19) \quad \tau = \sin \theta \cdot (W \cdot g \cdot d - k \cdot a \cdot b)$$

che quindi si annulla per un'opportuna scelta dei parametri a , b e d (si suppone che k e g siano dati), indipendentemente dall'angolo θ . La molla quindi “cancella” completamente la forza peso, quindi, per movimenti sul piano verticale, la massa è come se fosse libera dalla forza di gravità. Una piccola variazione di g cambia la situazione, e quindi non c'è più equilibrio.

Un sistema come questo, che lavora in condizioni prossime all'instabilità, si dice **astatico**.

La sensibilità di questi strumenti meccanici⁶⁴ è in genere di circa $1 \mu\text{gal}$ ($= 1 \text{nm/s}^2$), cioè una parte su 10^9 del valore di g . Una tale differenza di g è quella che si misura per una differenza di elevazione di circa 3 mm.

Il gal o Gal è una unità (non SI) di misura dell'accelerazione (e quindi di g), pari a 1cm/s^2 , usata dai geofisici ($g \approx 980 \text{gal}$); prende il nome da Galileo Galilei.

⁶⁴ Esistono attualmente gravimetri superconduttori, che utilizzano la levitazione magnetica, che arrivano alla sensibilità di un nano gal. Sono ovviamente gravimetri relativi.



System Specifications

Principle:	Linear electrostatic beam nulling
Range:	100 mGal
Data Resolution:	0.01 (0.001 mGal for Aliod 100x**)
Repeatability:	0.01 to 0.02 mGal
Linearity:	Better than 0.01% Full Scale
Electronic Drift:	<0.001 mGal /1000 hr.
Temp. Range:	-40°C to +45°C
Integrated LCD:	2x20 character LCD with backlight
Output:	RS-232, External Port
Data Logging:	Continuous w/Que™ handheld
Data storage:	SD Flash Card
Tide Correction:	Automatic
Power Consumption:	12 Volts@0.190 Amp/2.3 Watts
Input:	10-15 VDC

* Electronic Levels required

** Export License may be required

Specifications subject to change

Que is a trademark of GARMIN

Il gravimetro LaCoste-Romberg Aliod 100 e le sue caratteristiche

Parte quarta – Complementi di fisica generale

24 - Fluidi reali

Nello studio dei fluidi ideali si suppone che l'unica forza che un fluido esercita sulle pareti del recipiente o di un corpo in esso immerso sia la pressione sempre ortogonale alla superficie di contatto.

Inoltre si suppone che non ci siano attriti nel loro moto e nel moto di un corpo in essi immerso. Non si ha quindi dissipazione di energia: nel caso di flusso stazionario di un fluido ideale, compressibile o no, attraverso un condotto, l'equazione di Bernoulli, dove p è la pressione, ρ la densità, v la velocità lungo una linea di flusso, g l'accelerazione di gravità ed h la quota,

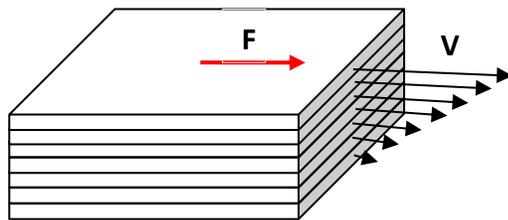
$$(24.1) \quad p + \rho \cdot \frac{v^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h = \text{costante}$$

descrive la conservazione dell'energia.

Questa è solo un'approssimazione⁶⁵ nel caso dei fluidi reali, a volte molto lontana dalla realtà.

Viscosità

Supponiamo che un fluido si muova, in un condotto liscio e piano, di moto laminare, cioè in modo che ciascuna "lamina" di fluido si muova alla stessa velocità costante. Lo strato a contatto col fondo è immobile, mentre man mano che ci si allontana da esso la velocità aumenta.



Ciò è indice della presenza di forze per unità di superficie tra gli strati ("sforzi di taglio") che supporremo proporzionali alla differenza di velocità tra di essi (ipotesi di Newton). In formule

$$(24.2) \quad \frac{dF_t}{dS} = \eta \cdot \frac{dv}{dz}$$

⁶⁵ Fanno eccezione i cosiddetti *superfluidi*, come per esempio l'elio-4 al di sotto di 2.17 K, in cui non si hanno dissipazioni di energia e il coefficiente di viscosità è nullo: questi superfluidi in un percorso chiuso potrebbero scorrere all'infinito.

ove $\frac{dF_t}{dS}$ è lo sforzo di taglio (con le dimensioni di una pressione), $\frac{dv}{dz}$ la variazione di velocità con la variazione di distanza dal fondo e η il cosiddetto **coefficiente di viscosità**⁶⁶. Un fluido per cui vale una relazione di questo tipo viene detto *fluido newtoniano*⁶⁷.

Il coefficiente di viscosità ha le dimensioni di una pressione per un tempo. Si misura in genere con un'unità non S.I., ma CGS, il poise, dal nome del fisiologo e fisico francese Jean Louis Marie Poiseuille (1799-1869), che studiò il moto dei fluidi viscosi e in particolare del sangue. Il poise si indica con P; più diffuso è il centipoise, cP, poiché il coefficiente di viscosità dell'acqua a 20 °C è circa 1 cP⁶⁸.

La viscosità di un fluido varia significativamente con la temperatura. Ecco la tabella per l'acqua:

Viscosità dell'acqua	
°C	cP
10	1.308
20	1.003
30	0.7978
40	0.6531
50	0.5471
60	0.4668
70	0.4044
80	0.3550
90	0.3150
100	0.2822

In appendice c'è una tavola dei coefficienti di viscosità per alcuni fluidi.

I solidi amorfi, come il vetro, sono considerati fluidi ad altissima viscosità.

⁶⁶ Il termine deriva da *viscum*, il nome latino del vischio.

⁶⁷ Esempi di fluidi non newtoniani sono alcune soluzioni di polimeri.

⁶⁸ L'unità S.I. è il poise, indicato con Pl. Si ha 1 Pl = 10 P, quindi 1 cP = 1 mPl .

Legge di Poiseuille

Sotto l'ipotesi "newtoniana" (24.2), possiamo calcolare il flusso attraverso un condotto cilindrico, trovando (legge di Poiseuille):

$$(24.3) \quad \Phi = \frac{dV}{dt} = \pi \cdot r^2 \cdot v = \frac{\pi \cdot r^4}{8 \cdot \eta} \cdot \frac{\Delta P}{l}$$

dove r è il raggio del condotto, v la velocità media del fluido nel condotto, l la lunghezza del condotto, ΔP la differenza di pressione agli estremi e η il coefficiente di viscosità.

Notiamo che questa legge contraddice l'equazione di Bernoulli, poiché si ha, anche per v e quota eguali tra l'uscita e l'ingresso del condotto, una differenza di pressione tra i due estremi.

La velocità del fluido nel tubo non è uniforme su tutta la sezione, ma cresce man mano che dalle pareti si va verso il centro ed è nulla sulle pareti. Si dimostra che

$$(24.4) \quad v(x) = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{\Delta P}{l} \cdot (r^2 - x^2)$$

dove x è la distanza dall'asse del tubo. La dipendenza della velocità dalla distanza dall'asse è quindi parabolica.

Dalla legge di Poiseuille possiamo anche calcolare la velocità media del fluido nel condotto cilindrico come

$$(24.5) \quad v = \frac{r^2}{8 \cdot \eta} \cdot \frac{\Delta P}{l}$$

o la caduta di pressione tra due punti a distanza l di un condotto cilindrico di raggio r

$$(24.6) \quad \Delta P = 8\eta \cdot v \cdot \frac{l}{r^2}$$

Moto vorticoso e Numero di Reynolds

Il moto laminare, in cui il fluido si muove per strati separati, non si osserva nel caso la velocità superi un certo valore o se il moto del fluido non è rettilineo. In questi casi le particelle di fluido appartenenti a diversi strati si mescolano tra di loro. Il moto quindi non è più ordinato, ma si formano vortici che mescolano tra loro parti di varie lamine. Un esempio di ciò è il fumo di una sigaretta, che all'inizio è laminare e poi dà luogo a vortici che lo disperdono nell'aria.

Una importante caratteristica del moto laminare è che esso minimizza gli attriti tra le particelle del fluido e tra queste e le pareti del condotto. Ciò non accade al moto turbolento, che quindi è associato a una ben maggiore dissipazione.

Osborne Reynolds, nel 1883, introdusse una quantità adimensionale, da lui detto Numero di Reynolds



$$(24.7) \quad Re = \frac{v \cdot \rho \cdot D}{\eta}$$

dove v è la velocità, ρ la densità, η al solito il coefficiente di viscosità e D una lunghezza caratteristica dell'oggetto o del condotto. Egli trovò che per bassi valori di Re si presentava flusso laminare, mentre al crescere di Re al di sopra di $2 \sim 3000$ (per un condotto), si aveva turbolenza. Il numero di Reynolds può essere visto come il rapporto tra le forze inerziali e le forze viscosi; per esempio in un tubo, possiamo porre la forza inerziale come

$$(24.8) \quad F_i = v \cdot \frac{dm}{dt} = \rho \cdot A \cdot v^2$$

dove A è la sezione del tubo. Per la forza viscosa

$$(24.9) \quad F_v = \frac{\eta A v}{2r}$$

e quindi

$$(24.10) \quad \frac{F_i}{F_v} = \frac{\rho \cdot v \cdot (2r)}{\eta}$$

essendo $2r$, il diametro, la "lunghezza caratteristica".

Quando quindi le forze viscosi sono abbastanza forti rispetto a quelle inerziali, si riesce ad avere un moto laminare, altrimenti si ha il moto vorticoso.

Intuitivamente, se c'è abbastanza "viscosità", cioè ciascuna particella influenza le vicine, il moto è più ordinato, altrimenti prendono il sopravvento le tendenze di moto casuale delle varie particelle e il moto diventa "caotico".

Nel flusso attraverso un condotto il passaggio da flusso laminare a flusso vorticoso comporta un deciso cambiamento nella legge che lega la differenza di pressione alla velocità. Dall'equazione (24.6) si passa all'equazione di Darcy-Weisbach

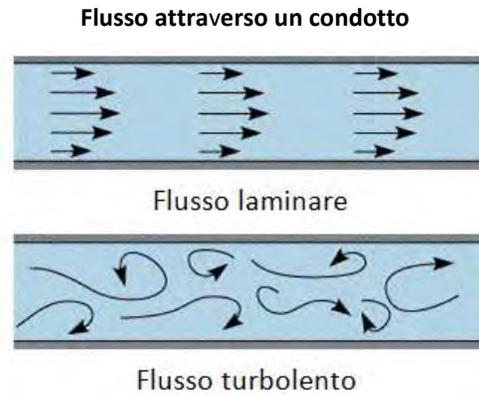
$$(24.11) \quad \Delta P = \lambda \cdot \frac{l}{r} \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2}$$

dove λ è un fattore adimensionale, l e r la lunghezza e il raggio del condotto, ρ la densità e v la velocità. Come si vede, a differenza della (24.6), non compare il coefficiente di viscosità, la dipendenza da v è quadratica ed è inversamente proporzionale a r (invece che a r^2).

Dalla precedente ricaviamo

$$(24.12) \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot r}{\lambda \cdot l \cdot \rho} \cdot \Delta P}$$

da confrontare con la (24.5): cioè, passando da moto laminare a vorticoso, la dipendenza della velocità (o del flusso) dalla differenza di pressione da lineare diventa dipendente dalla radice quadrata.



Resistenza fluidodinamica

Un corpo in moto in un fluido (per esempio aria o acqua) è sottoposto a una forza frenante causata dalla viscosità del fluido. Questa *resistenza fluidodinamica* (*drag* in Inglese) viene anche detta **attrito viscoso**.

Lo studio di questo fenomeno è piuttosto complesso. L'effetto dipende dalla velocità (in modo in genere non semplice), dalla viscosità, dalla forma dell'oggetto, dal trattamento della superficie (vortici, viscosità) e eventualmente dalla formazione di vortici, dall'induzione di portanza (per esempio negli aerei), dalla generazione di onde (che portano via energia) e in particolare onde d'urto che si formano quando la velocità supera quella del suono.

Nel caso di basse velocità (ovvero bassi numeri di Reynolds) la forza d'attrito esercitata sul corpo è proporzionale alla velocità v

$$(24.13) \quad F_D = -\beta \cdot v$$

In tal caso il moto in caduta libera ha una velocità verso il basso

$$(24.14) \quad v(t) = \frac{m \cdot g}{\beta} \cdot \frac{\rho_C - \rho_F}{\rho_C} \cdot (1 - e^{-\beta t/m})$$

dove m è la massa del corpo, g l'accelerazione di gravità, ρ_C e ρ_F le densità del corpo e del fluido. Come si vede, si arriva a una velocità asintotica (che sarà verso il basso o verso l'alto dipendentemente da se la densità del corpo è maggiore o minore di quella del fluido), del valore

$$(24.15) \quad v_\infty = \frac{m \cdot g}{\beta} \cdot \frac{\rho_C - \rho_F}{\rho_C}$$

George Gabriel Stokes ricavò il valore di β nel caso di un corpo sferico di raggio r :

$$(24.16) \quad \beta = 6\pi \cdot \eta \cdot r$$

La potenza dissipata dalla resistenza fluidodinamica del tipo di eq. (24.13) è

$$(24.17) \quad W = F_D v = -\beta \cdot v^2$$

Quando la velocità aumenta (numeri di Reynolds > 2000), Lord Rayleigh trovò che la forza frenante diventa proporzionale al quadrato della velocità

$$(24.18) \quad F_D = -\frac{1}{2} \rho_F v^2 A \cdot C_D$$

dove A è la "sezione d'urto" del corpo e C_D un coefficiente adimensionale che dipende dall'"aerodinamicità" del corpo e viene detto coefficiente di resistenza aerodinamica (in Inglese

drag coefficient). Si noti che non c'è più dipendenza dal coefficiente di viscosità: d'altronde, per grandi valori del numero di Reynolds, le forze viscosi sono trascurabili rispetto alle forze inerziali. I valori di C_D sono, per un'auto di oggi, da 0.2 a 0.4, per un aereo circa 10 volte di meno. Progettare forme aerodinamiche (o idrodinamiche per oggetti che si devono muovere in acqua) è piuttosto complesso e normalmente viene fatto con l'ausilio della simulazione nella "galleria del vento" (o nella "vasca navale" per i natanti), oltre a complesse simulazioni sul computer.

La potenza dissipata nel caso di (24.18) è

$$(24.19) \quad W = F_D \cdot v = -\frac{1}{2} \rho_F v^3 A \cdot C_D$$

Si noti la dipendenza cubica di questo valore. Il consumo di un'auto ad alta velocità, quando il consumo è per lo più dovuto a controbilanciare la dissipazione dovuta alla resistenza fluidodinamica, cresce velocemente con la velocità: tra 110 e 140 il consumo orario circa raddoppia e il consumo chilometrico è poco più di 1.6 volte.

Parte quinta - Esercitazioni di laboratorio

Misura di densità

Sono disponibili due cilindri e due parallelepipedi dello stesso materiale. Occorre misurare il volume e la massa di ciascun oggetto e calcolare la densità (assoluta) del materiale di cui sono composti, determinando anche l'incertezza delle varie misure.

La misura del volume va eseguita come misura indiretta utilizzando le misure delle dimensioni degli oggetti e, come misura diretta, misurando l'innalzamento del livello dell'acqua di un "provettone", dopo che è stato immerso in essa l'oggetto in esame.

Va inoltre eseguita la misura col metodo di Archimede con la bilancia elettronica (vedi pagina 180).

Strumenti disponibili:

- Calibro a cursore con nonio (sensibilità 0.05 mm)
- Calibro Palmer (sensibilità 0.01 mm)
- Bilancia sensibilità 0.5 g
- Bilancia sensibilità 0.01 g
- Provettone graduato

Alla fine della relazione aggiungere il prospetto riassuntivo riportato alla fine del paragrafo.

Note (in forma di domande tipiche a.k.a. FAQ):

- Tra le misure effettuate con i vari strumenti di diversa sensibilità, quale bisogna considerare? (per esempio tra le misure con le diverse bilance, quale prendere per calcolare la densità?)

Va presa la misura con più bassa incertezza. In linea di principio, se ci sono misure con incertezze non tanto differenti, si può farne la media pesata (vedi capitolo 15).

È importante invece fare il confronto tra le misure con i vari strumenti, per vedere se sono coerenti, se cioè gli intervalli di misura hanno punti in comune.

- Cosa si deve fare se due misure fatte con differenti strumenti non sono coerenti?

Quasi sicuramente ci sono errori (lo strumento è starato o sono state compiute operazioni errate). Ripetere le misure con più cura ed eventualmente sostituire gli strumenti.

- Come si calcolano le incertezze sui volumi e sulla densità?

Si vedano le formule riportate nel capitolo 6. Nel caso del volume del cilindro, essendo B l'area di base ed h l'altezza, abbiamo

$$(1.1) \quad V = B \cdot h$$

$$(1.2) \quad \Delta V = \sqrt{\left| \frac{\partial V}{\partial B} \Delta B \right|^2 + \left| \frac{\partial V}{\partial h} \Delta h \right|^2} = \sqrt{(h \cdot \Delta B)^2 + (B \cdot \Delta h)^2}$$

- Come mettere insieme incertezze dovute ad errori casuali ed incertezze dovute ad errori di lettura ?

Il problema è che l'errore di lettura è distribuito uniformemente (e in genere se ne dà la semi-ampiezza dell'intervallo di misura), mentre l'errore casuale è gaussiano (e se ne dà spesso la deviazione standard). In genere, quando si hanno misure con incertezze dei due tipi da combinare insieme, si riportano entrambe a deviazioni standard, che significa dividere l'incertezza di lettura per $\sqrt{3}$ (vedi capitolo sulla distribuzione uniforme e capitolo 17).

- Quante volte devo ripetere una misura ?

A parte casi banali, almeno 3 volte: se il risultato è sempre lo stesso, mi fermo; se è diverso, posso continuare per avere una decina di valori (o più)⁶⁹ o, se mi interessa un valore grossolano dell'incertezza, mi fermo a 3 e prendo come incertezza il massimo meno il minimo valore, diviso 2, più l'errore di lettura.

- Quali sono le incertezze delle bilance in uso ?

Per le bilance digitali si considera metà del minimo "digit" (cifra). Per quella analogica, 0.5 g.

- Come si scrivono le misure ?

Si veda al capitolo 4.

- Come si fa a fare una stima grossolana dell'incertezza di misura (per controllare che quello che viene fuori dai calcoli non sia chiaramente errato) ?

Se la formula è abbastanza semplice (per esempio un prodotto di potenze, eventualmente negative, come nella 7.19, allora l'incertezza relativa sarà dell'ordine della massima incertezza relativa presente (si noti che le altre, se sono molto più basse, a causa della somma quadratica, non contano nulla).

Si noti che basse incertezze assolute possono "causare", in taluni casi, alte incertezze relative. Per esempio, nel calcolo dell'area A di un rettangolo di lati a e b , l'incertezza relativa è data da

$$(1.3) \quad \frac{\Delta A}{A} = \sqrt{\left(\frac{b \cdot \Delta a}{A} \right)^2 + \left(\frac{a \cdot \Delta b}{A} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a} \right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b} \right)^2}$$

⁶⁹ In tal caso poi, facendo la media, miglioro la mia incertezza della radice quadrata del numero delle misure.

e, anche se $\Delta a \ll \Delta b$, se $a \ll b$, può risultare che il termine relativo ad a sia più grande di quello relativo a b .

Ulteriori analisi

Ricavare quindi la migliore stima della densità dai vari valori ottenuti (con il metodo della media pesata).

Misurare la densità col metodo “standard” con la bilancia elettronica al centesimo di grammo (vedi nel capitolo 20, equazione (21.10))

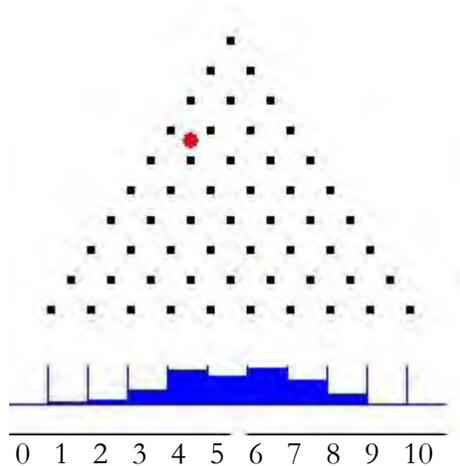
Prospetto riassuntivo

Misure di densità				Gruppo			
Primo cilindro				Secondo cilindro			
	Valore	Incertezza	Unità		Valore	Incertezza	Unità
Diametro (cal)				Diametro (cal)			
Diam. (Palmer)				Diam. (Palmer)			
Lunghezza				Lunghezza			
Volume				Volume			
Massa				Massa			
Densità				Densità			
Primo parallelepipedo				Secondo parallelepipedo			
	Valore	Incertezza	Unità		Valore	Incertezza	Unità
Lato 1 (cal)				Lato 1 (cal)			
Lato 1 (Palmer)				Lato 1 (Palmer)			
Lato 2 (cal)				Lato 2 (cal)			
Lato 2 (Palmer)				Lato 2 (Palmer)			
Lunghezza				Lunghezza			
Volume				Volume			
Massa				Massa			
Densità				Densità			
Misura col provettone							
	Valore	Incertezza	Unità		Valore	Incertezza	Unità
Vol. Cilindro 1				Vol. parallel. 1			
Densità				Densità			
Misura col principio di Archimede							
Primo cilindro				Secondo cilindro			
	Valore	Incertezza	Unità		Valore	Incertezza	Unità
Massa immersa				Massa immersa			
Densità				Densità			
Primo parallelepipedo				Secondo parallelepipedo			
	Valore	Incertezza	Unità		Valore	Incertezza	Unità
Massa immersa				Massa immersa			
Densità				Densità			

Esercitazioni statistiche

Il Pallinometro

“Pallinometro” è il nomignolo dato dagli studenti al quinconce di Galton (da Francis Galton (1822-1911), scienziato britannico), un semplice strumento che evidenzia un comportamento casuale. Esso è costituito da una tavola verticale su cui sono disposti dei chiodini “a quinconce” (vedi figura), su N file orizzontali. Se si lasciano cadere dall’alto delle palline di diametro inferiore alla distanza tra i chiodini e superiore alla sua metà (o poco meno), queste cadranno incontrando i chiodi e, quindi, a seconda di come avviene l’urto, andranno a destra o a sinistra.



Sotto sono disposti dei “bidoncini” (“bin”) che raccolgono le palline. Dopo averne lanciate un certo numero, si “forma” nei bidoncini un “istogramma”.

Analizziamo il dispositivo. Ad ogni fila di chiodi che incontra la pallina, avviene una scelta tra il deviare a destra (D) e a sinistra (S). Possiamo quindi descrivere il percorso della pallina come una successione del tipo SSDSDDDSSDS... di N successivi valori. Il bidoncino dove cade la pallina non dipende dalla successione degli S e D, ma solo dal numero totale degli s o dei D e dal numero N delle file di chiodi.

È chiara l’analogia con le prove alla Bernoulli. Se per esempio chiamiamo “successo” la scelta D, i bidoncini possono essere numerati da sinistra a destra con i numeri da 0 a N e la pallina cade nel bidoncino k se sono k le volte che ha “scelto” di andare a destra.

k quindi è una variabile casuale discreta con distribuzione

$$(2.1) \quad P(k; N) = p_k = \binom{N}{k} \frac{1}{2^N}$$

che è la binomiale con $p = q = \frac{1}{2}$.

Se lanciamo M palline, il numero aspettato di palline in ciascun bin è dato da

$$(2.2) \quad t_k = M \cdot P(k; N) = M \cdot \binom{N}{k} \frac{1}{2^N}$$

I t_k sono i valori “teorici” o “aspettati” del numero di palline nei bin; non sono, se non in casi molto rari, interi (per esempio se $M = 2^N$).

Scegliendo N (il numero delle file di chiodi) almeno pari a 20, eseguire alcune serie di “lanci” con $M = 30, 100, 300, 1000, 3000, 10000$, riportando sul quaderno i risultati “sperimentali” s_k e gli istogrammi, divisi in due figure, una con $M = 30, 100, 300$ e una con $M = 1000, 3000, 10000$. Per almeno una serie, riportare sulla figura dell’istogramma anche i valori aspettati t_k . Graficare tutti gli istogrammi in una sola figura su un foglio di carta semilog, insieme anche all’andamento teorico (in un foglio semilog l’andamento teorico ha sempre la stessa forma, a parte uno scorrimento in alto o in basso). Calcolare la media di k .

Perché 30, 100, 300, 1000, 3000 e 10000? Vedi in Appendice “La scala logaritmica”.

Ulteriori riflessioni

Ripetiamo L volte un numero M di lanci. Consideriamo il bin k , caratterizzato da un valore aspettato t_k ; per ognuna delle L serie, segniamo il valore sperimentale s_k : come sono distribuiti gli s_k ? È facile rendersi conto che si tratta di una distribuzione binomiale in cui M sono le prove ripetute e $p = p_k = t_k / M$; gli s_k potranno prendere i valori m con $0 \leq m \leq M$, ciascuno con probabilità

$$(2.3) \quad \text{Prob}(m; p_k, M) = \binom{M}{m} p_k^m (1 - p_k)^{M-m}$$

Poiché t_k è in genere piccolo e M grande, spesso si approssima questa alla distribuzione di Poisson

$$(2.4) \quad \text{Prob}(m; t_k) = \frac{e^{-t_k} t_k^m}{m!}$$

Ricordiamo ora che la distribuzione di Poisson ha una deviazione standard $\sigma = \sqrt{\mu}$, quindi la dispersione relativa è $\frac{\sigma}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{t_k}}$ e, se s_k è abbastanza grande, la dispersione relativa è circa $\frac{1}{\sqrt{s_k}}$. Infatti vediamo che, tanto più grande è il numero di palline che vanno in un bin, tanto più piccolo è l’errore percentuale tra s_k e t_k .

Ulteriori analisi

- Eseguire il test del χ^2 per almeno una serie tra s_k e t_k (prendere il livello di fiducia pari a 0.95).
- Supponendo che non sia $p = \frac{1}{2}$ la probabilità per la pallina di andare a destra, stimarla dai valori sperimentali di una serie.

Il contatore

È a disposizione per questa esperienza un contatore di raggi cosmici, basato su un fotomoltiplicatore e un materiale scintillatore. Il dispositivo può essere regolato in modo tale da dare il numero di raggi cosmici rivelati in un dato intervallo di tempo (per esempio 10 secondi) selezionabile. Fare circa $N = 50$ misure con $\Delta t = 5 s$ e altrettante con $\Delta t = 10 s$ e con $\Delta t = 20 s$ o $\Delta t = 2.5 s$, dipendentemente dal valore medio del numero di conteggi al secondo (se è maggiore di circa 1, scegliere l'intervallo più piccolo).

Istogrammare i dati, calcolare la media \bar{k} e riportare sui grafici gli andamenti teorici

$$(2.5) \quad t_k = N \cdot \frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!}$$

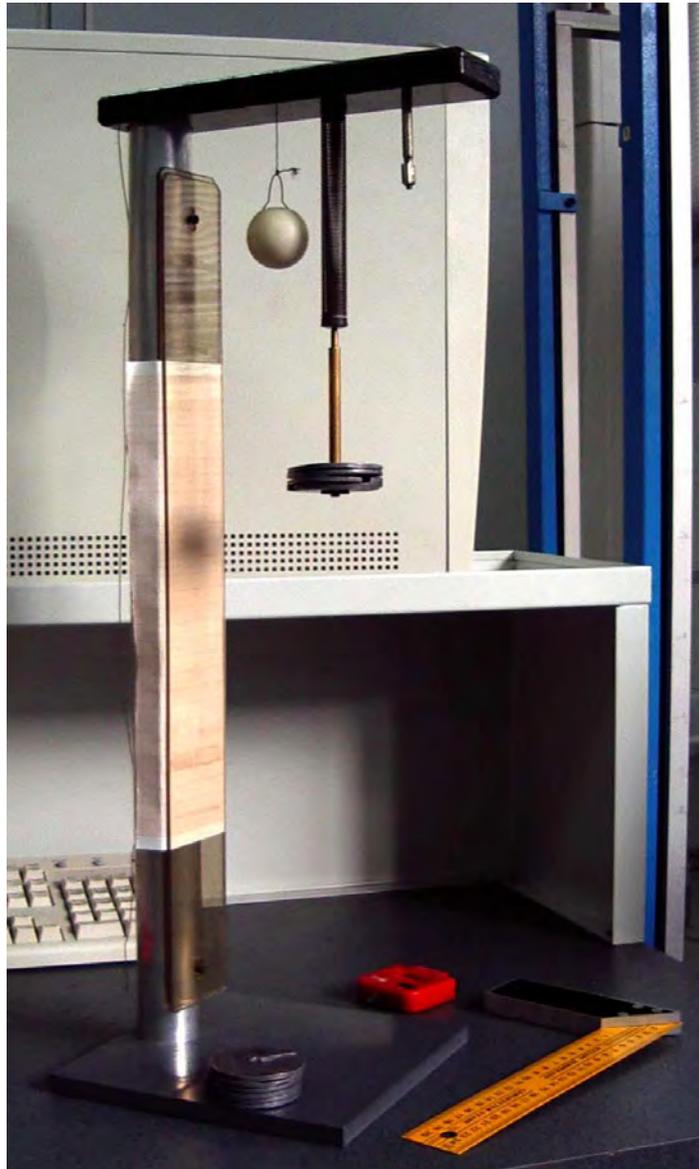
avendo posto $\mu = \bar{k}$. Controllare che $\bar{k}_{20s} \approx 2 \cdot \bar{k}_{10s} \approx 4 \cdot \bar{k}_{5s}$.

La molla

Lo scopo di questa esperienza è la misura della costante elastica di una molla e dell'accelerazione di gravità.

È disponibile un supporto a cui è agganciata verticalmente una molla e 10 dischi di piombo che possono agganciarsi all'estremo inferiore libero della molla.

Possono eseguirsi misure di massa (dei dischetti) con bilance (vedi esperienza della densità), misure di tempo (il periodo di oscillazione del sistema molla-dischetti) con un cronometro, e di lunghezza (l'allungamento della molla) con un traguardo di carta millimetrata e una squadra.



L'allungamento Δl di una molla a cui è applicata una forza è governato dalla legge di Hooke

$$(3.1) \quad F = -k \cdot \Delta l$$

dove k , positiva, è la "costante elastica della molla", a noi incognita. La forza applicata è la forza-peso dei dischetti di piombo agganciati, di massa totale M ,

$$(3.2) \quad F = M \cdot g$$

ovvero, prendendo le grandezze in modulo,

$$(3.3) \quad M \cdot g = k \cdot \Delta l$$

dove g è l'accelerazione di gravità, che è una delle cose che vogliamo misurare. Si dimostra che il periodo di oscillazione del sistema molla-massa (dei dischetti) è dato da

$$(3.4) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}$$

Possiamo utilizzare questa relazione per ricavare k :

$$(3.5) \quad k = 4\pi^2 \frac{M}{T^2}$$

(Attenzione ! in pratica in M è compresa anche la massa "parassita" della molla e del perno, che danno luogo ad una massa "efficace" aggiuntiva).

Dalle precedenti equazioni, sostituendo il valore noto di k , si ricava g come

$$(3.6) \quad g = \frac{k \cdot \Delta l}{\Delta M}$$

dove ΔM è la variazione di massa che produce l'allungamento Δl .

In pratica, per ridurre l'errore e per calcolare la massa parassita efficace, stimeremo k e g da due grafici lineari.

La procedura consigliata, arricchita di elementi didattici non finalizzati al calcolo di k e g , è la seguente:

- identificare e pesare singolarmente i dischetti di piombo. Calcolarne la media con la relativa incertezza.
- pesarli tutti e 10 contemporaneamente. Fare la "media fisica", dividendo il valore per 10 e valutare l'incertezza dall'errore di sensibilità della bilancia. Confrontare le due medie ottenute.
- agganciare successivamente i vari dischetti al perno. Per ciascun dischetto aggiunto:
 - misurare l'allungamento della molla (osservando la posizione del perno), aumentando via via il numero di dischetti; si noti che la molla si "libera" dopo

l'applicazione di almeno 3 dischetti, quindi l'allungamento Δl va calcolato rispetto alla posizione di equilibrio con 3 dischetti.

- misurare il periodo di oscillazione del sistema molla-dischetti. Per ridurre gli errori di misura, misurare il tempo impiegato ad eseguire N oscillazioni (almeno 20) e dividerlo per N : anche l'errore di misura (dato per lo più dall'errore dell'operatore umano a far partire e a fermare il cronometro al tempo esatto, dell'ordine in genere di 0.2 s) si ridurrà dello stesso valore N .
- ripetere le misure più volte, eliminando casi molto diversi dagli altri simili; farne quindi la media e valutare l'errore su questa media.
- fare un grafico di T^2 in funzione di M (per M dato da 3,4,...,10 dischetti). Notare che l'andamento dovrebbe essere rettilineo (ma una retta $y = p x + q$ che non passa per l'origine, perché c'è anche la massa "parassita" della molla). Ricavare:
 - la pendenza della retta (il coefficiente angolare p) e da questa il k come

$$(3.7) \quad k = \frac{4\pi^2}{p}$$

- la massa parassita, pari a $-\frac{q}{p}$.

- fare un grafico di Δl in funzione di ΔM (e **non** di M !). Anche in questo caso l'andamento è rettilineo, ma la retta $y = a x$ passa per l'origine. Dal valore a del coefficiente angolare ricaviamo l'accelerazione di gravità g

$$(3.8) \quad g = a \cdot k$$

- fare un grafico su carta doppio-logaritmica dei periodi T in funzione delle masse M applicate alla molla, corrette con l'aggiunta della massa parassita. I punti graficati dovrebbero trovarsi su una retta di pendenza $\frac{1}{2}$.
- riempire il seguente Quadro Riassuntivo, da mettere alla fine della relazione:

Il piano inclinato – I

Lo scopo di questa esperienza è lo studio del moto rettilineo di un corpo.

A questo scopo utilizziamo un carrellino che può muoversi con poco attrito su di una rotaia e ne osserviamo il moto con un sonar.

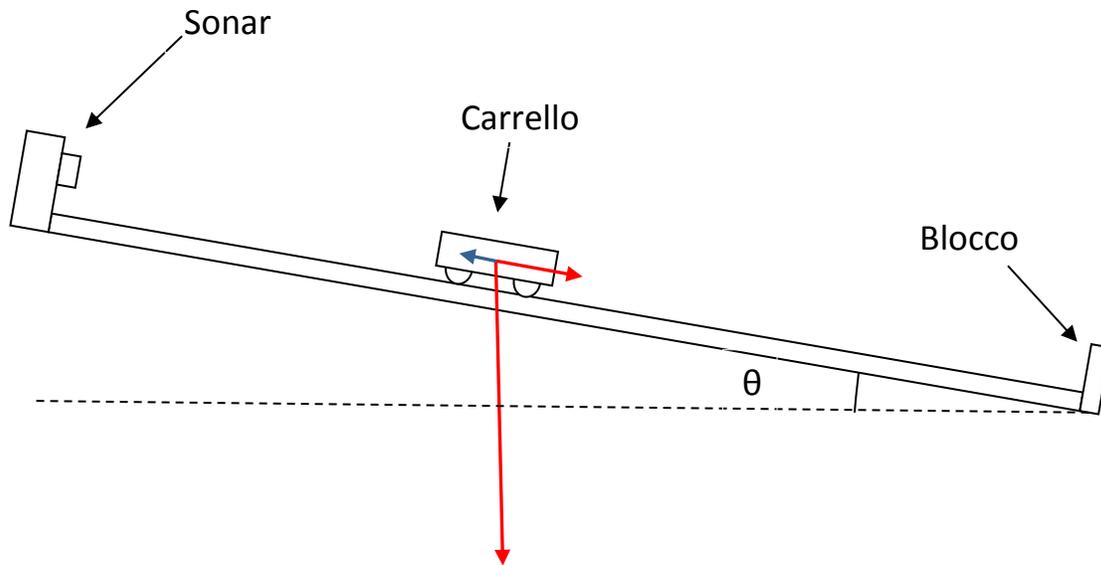
(Per informazioni sul sistema di acquisizione dei dati, vedere il capitolo che lo descrive.)

Faremo due esperimenti: uno con la rotaia inclinata e il carrellino “libero” e una con la rotaia in piano e il carrellino tirato da un piccolo peso. Dovremo identificare e valutare le forze in gioco, e cioè la forza gravitazionale e l’attrito.

Per prima cosa controlleremo la calibrazione del sonar. Per far questo controlleremo i valori di distanza che indica il sonar per il carrellino in posizione 1 m e 2 m e valuteremo l’errore di zero e l’errore di scala: il primo è dovuto ad un errore di posizione del sonar e il secondo ad un errore dell’impostazione della velocità del suono. Se ci sono sensibili errori di calibrazione, il sistema si può ricalibrare (in genere con la procedura a 2 punti, non con la procedura a punto singolo). Se c’è solo un errore di zero, ai nostri scopi non è importante correggerlo. Alternativamente si può tenere la calibrazione “errata” e tener conto dell’errore nella fase dell’analisi dei dati.

I esperimento - piano inclinato:

- si sceglie un’inclinazione di qualche grado per il piano inclinato (sollevando il sostegno laterale). Consiglio: non superare i 5 gradi.
- si porta il carrellino a una ventina di cm dal sonar e lo si lascia scendere, avendo fatto partire l’acquisizione dei dati; acquisire dati di posizione e velocità finché, dopo alcuni rimbalzi, il carrellino si ferma. Graficare i dati in tempo reale.
- si ripete per altre due diverse inclinazioni



La misura dell'angolo di inclinazione si può fare misurando le quote del binario rispetto al tavolo in due punti distanti. Siano queste h_1 e h_2 e la distanza tra questi (misurata sul binario) sia d . Allora si ha che l'angolo è (in gradi⁷⁰):

$$(4.1) \quad \theta = \arcsin\left(\frac{h_1 - h_2}{d}\right) \approx \frac{180}{\pi} \cdot \frac{h_1 - h_2}{d}$$

Ma attenzione ! Questo è l'angolo rispetto al piano del tavolo, non rispetto alla orizzontale⁷¹, se il piano del tavolo ha una anche minima inclinazione questa non è l'inclinazione assoluta.

L'incertezza su θ , soprattutto se l'angolo è piccolo, ha non solo un errore casuale relativo abbastanza grande (la differenza di quota non può farsi con un'incertezza inferiore al millimetro, e su una distanza di circa 1.5 m, per piccole inclinazioni, c'è una differenza di quota di circa 2.6 cm per grado di pendenza, quindi l'incertezza relativa è circa $\frac{5}{\theta}\%$), ma anche un errore sistematico dovuto all'inclinazione del tavolo, che potrebbe essere dell'ordine del decimo di grado.

Il carrello, di massa M , è sottoposto alla componente della forza di gravità e alla forza d'attrito, parallele entrambe al piano inclinato e opposte quando il carrello è in discesa, concordi quando è in salita. La forza totale è quindi

$$(4.2) \quad F = M \cdot g \cdot \sin \theta \pm \mu_v \cdot M \cdot g \cdot \cos \theta = M \cdot g \cdot (\sin \theta \pm \mu_v \cdot \cos \theta)$$

dove il segno meno vale quando il carrello è in discesa e il segno più quando è in salita.

⁷⁰ Supponiamo che la funzione *arcsin* sia espressa in gradi.

⁷¹ Ricordiamo che la verticale per un dato luogo è la direzione del filo a piombo, cioè di \vec{g} , e quindi l'orizzontale è il piano ortogonale a questa direzione. \vec{g}

Quindi dobbiamo misurare l'accelerazione in salita a_s e in discesa a_D e da queste ricaviamo il coefficiente di attrito volvente e g :

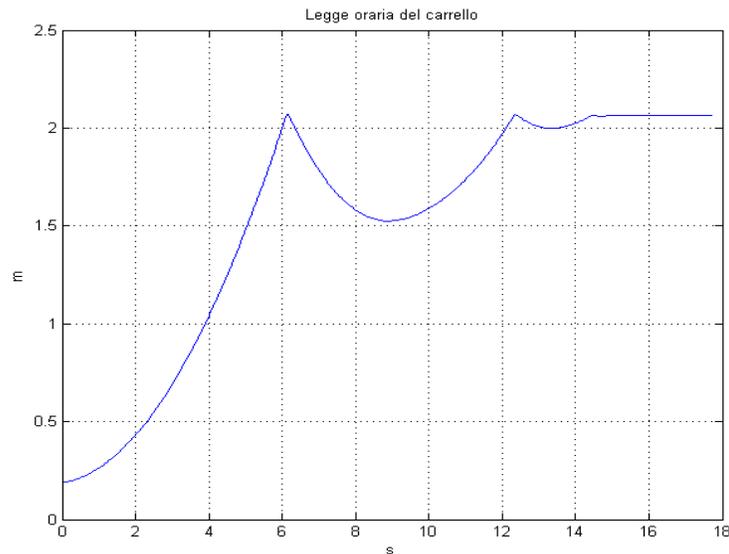
$$(4.3) \quad \begin{aligned} a_D &= g \cdot (\sin \theta - \mu_v \cos \theta) \\ a_s &= g \cdot (\sin \theta + \mu_v \cos \theta) \end{aligned}$$

da cui

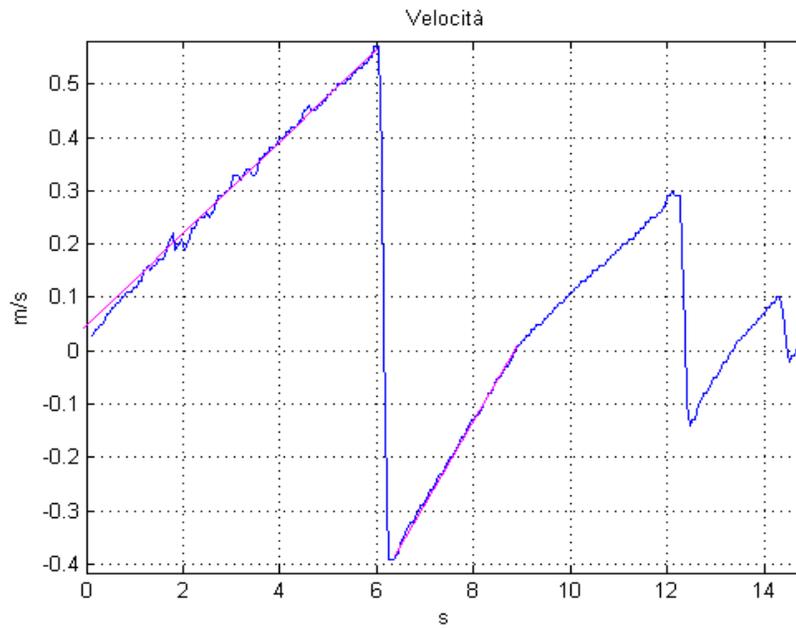
$$(4.4) \quad \begin{aligned} g &= \frac{a_D + a_s}{2 \cdot \sin \theta} \\ \mu_v &= \frac{a_s - a_D}{2 \cdot g \cdot \cos \theta} \end{aligned}$$

Si noti che, anche se sulla misura delle due accelerazioni possiamo avere una piccola incertezza assoluta e una buona accuratezza, non così sui due valori di g e di μ_v . Infatti l'incertezza e l'accuratezza di g è dominata dall'incertezza e dall'accuratezza di θ . Per quanto riguarda invece μ_v , questa è praticamente insensibile agli errori su θ , ma poiché le due accelerazioni sono molto vicine in valore, ma sottratte tra di loro, l'incertezza relativa può essere notevole.

Ed ecco la legge oraria per $\theta = 1^\circ$:



ed ecco il grafico della velocità, da cui è facile ricavare le due accelerazioni



Osservando i grafici notiamo che:

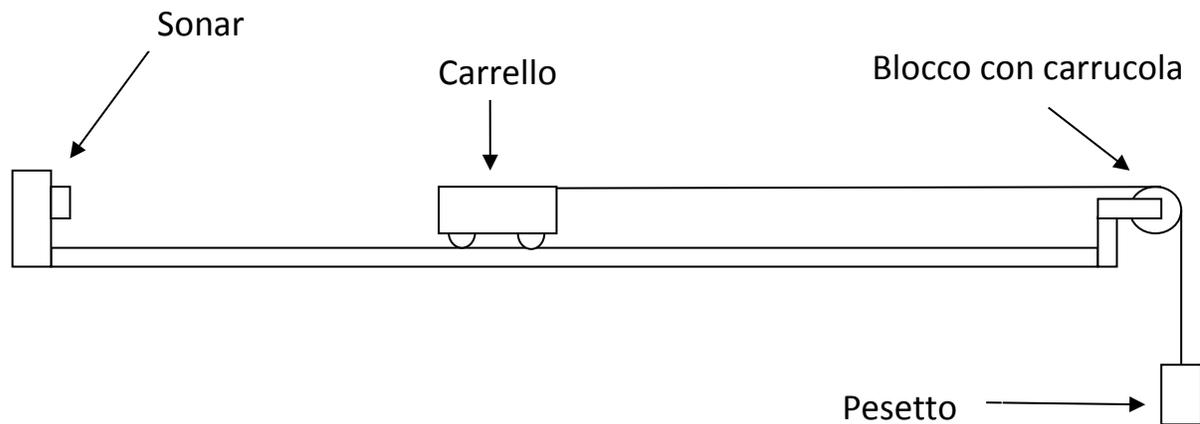
- qualitativamente è esattamente quello che ci aspettiamo: l'andamento della velocità è lineare nei vari segmenti, il che indica che l'accelerazione è costante.
- l'accelerazione, in valore assoluto, nei pezzi in discesa è inferiore che nei pezzi in salita, come si vede per la differente pendenza.
- C'è una notevole perdita di energia nell'urto contro il blocco all'estremità.

Calcoliamo quindi le due accelerazioni dai primi due segmenti del grafico delle velocità, valutandone le due pendenze, e calcoliamo quindi g e μ_v . Ripetiamo la procedura per le altre pendenze.

Se troviamo dei valori della g stimata sensibilmente diversi (con l'errore nello stesso verso), possiamo pensare a stimare l'inclinazione assoluta del piano del tavolo. Che è una misura niente affatto banale.

Il esperimento : carrello tirato dal pesetto

In questo secondo esperimento il binario è orizzontale (almeno “nominalmente”: ci sarà comunque un'inclinazione per quanto piccola). Il carrellino è legato a un filo che, passando per una carrucola posta all'estremo del binario, è collegato ad un pesetto che cade verticalmente.



Il carrello, di massa M , è sottoposto alla trazione del filo collegato al pesetto, di massa m , finché il pesetto non tocca il pavimento, dopodiché è soggetto solo alla forza d'attrito (che era presente anche prima). Le forze quindi sono

$$(4.5) \quad \begin{aligned} F_{prima} &= m \cdot g - M \cdot g \cdot \mu_v \\ F_{dopo} &= -M \cdot g \cdot \mu_v \end{aligned}$$

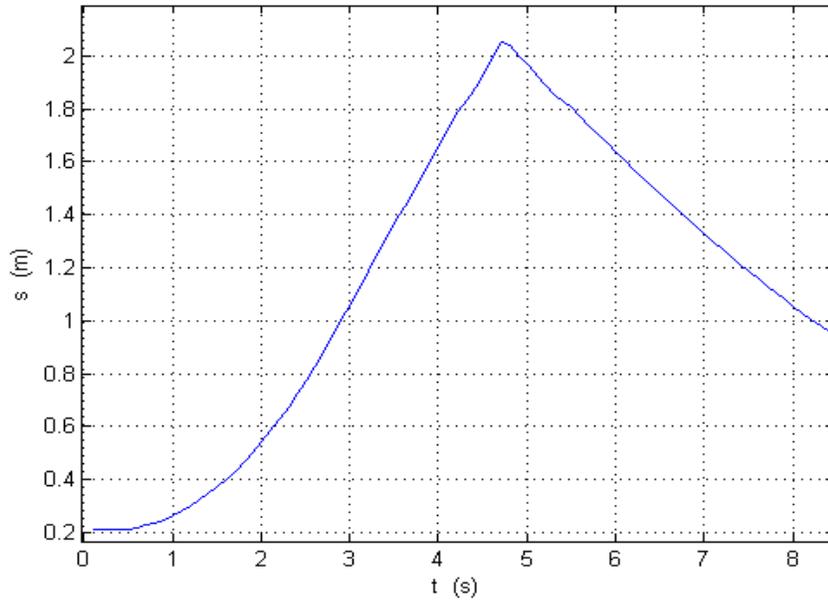
e l'accelerazione

$$(4.6) \quad \begin{aligned} a_{prima} &= \frac{m}{M+m} \cdot g - \frac{M}{M+m} \cdot g \cdot \mu_v \\ a_{dopo} &= -g \cdot \mu_v \end{aligned}$$

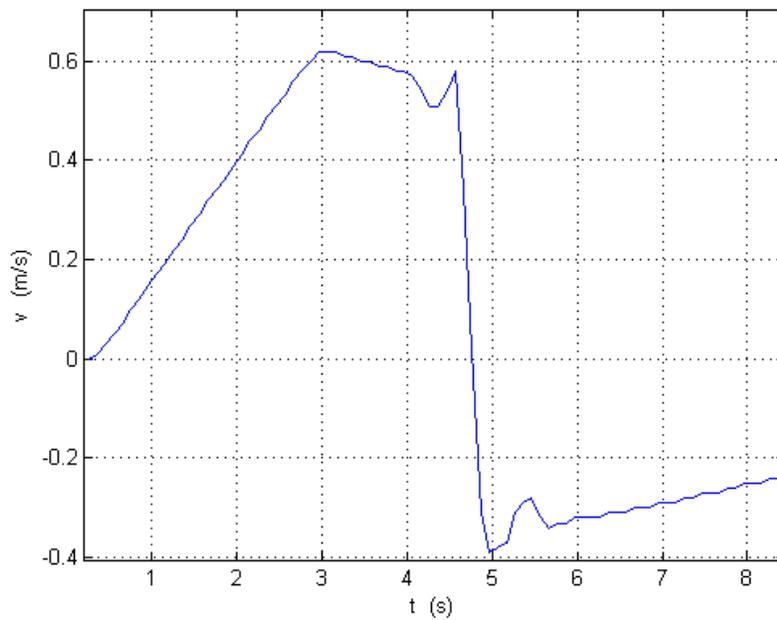
Conoscendo il rapporto tra le masse $\frac{m}{M+m}$, possiamo anche in questo caso valutare g e di μ_v .

$$(4.7) \quad \begin{aligned} g &= \frac{M+m}{m} \cdot a_{prima} - \frac{M}{m} \cdot a_{dopo} \\ \mu_v &= -\frac{a_{dopo}}{g} \end{aligned}$$

Ecco la legge oraria del carrello



e il diagramma della velocità:



Come si vede c'è un primo periodo in cui si ha un'accelerazione costante, quindi quando il pesetto tocca terra, si ha una lenta decelerazione e, infine, quando poi il carrello urta il blocco e rimbalza, si perde energia e quindi la velocità dopo il rimbalzo è, in valore assoluto, inferiore, e la decelerazione continua (finché il pesetto non viene ritirato su, ma in genere a questo punto il filo esce dalla carrucola).

Se il binario non è esattamente in piano, la decelerazione per il carrello non tirato è diversa se misurata in un verso o nell'altro: questo perché non c'è solo la forza dell'attrito, ma anche quella della gravità. Per stimare la pendenza, chiamate a_s e a_D le due accelerazioni verso sinistra (cioè verso il sonar) e verso destra (cioè nell'altra direzione), abbiamo

$$(4.8) \quad \theta = \frac{a_D + a_s}{2 \cdot g} \cdot \frac{180}{\pi}$$
$$\mu_V = \frac{a_s - a_D}{2 \cdot g}$$

dove l'angolo è espresso in gradi.

Ed ecco il Quadro Riassuntivo da riempire:

Piano Inclinato I Gruppo

Calibrazione

d = 0.5 m	1 m	1.5 m	2 m

	Δd

	errore di 0
	errore di scala

Piano inclinato

	Pendenza θ	$\Delta\theta$	unità	a_D	Δa_D	a_S	Δa_S	unità
1								
2								
3								

	mu_v	Δmu_v	g	Δg	unità
1					
2					
3					

Piano con pesi

massa carrello	
massa pesetto	
	a1 teorico

	valore	incertezza	unità
a1 - carrello tirato			
a2 - carrello libero			
a3 - dopo il rimbalzo			

	valore
	mu
	teta
	incertezza
	unità

A Roma $g = 9.8035 \text{ m/s}^2$

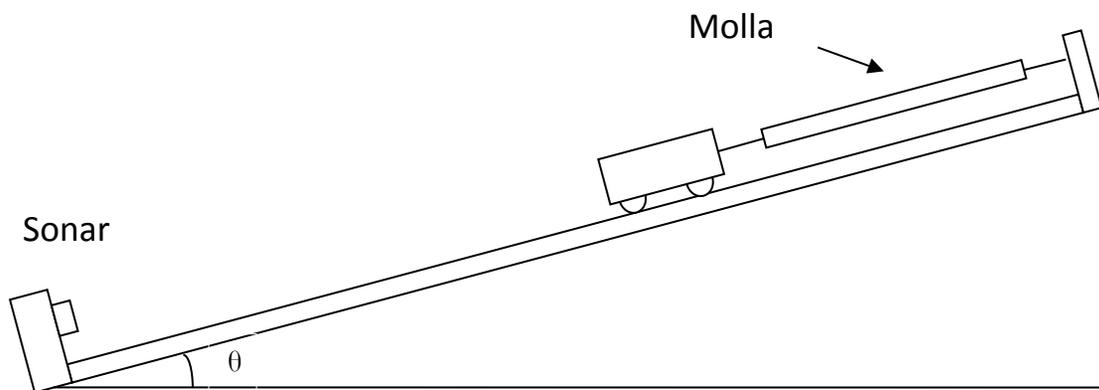
Il piano inclinato – II

Per questa esperienza utilizzeremo ancora il piano inclinato dell'esperienza precedente. Gli scopi dell'esperienza sono lo studio di un moto oscillatorio e una più raffinata analisi dell'attrito.

Come per la scorsa esperienza, la prima cosa è controllare la calibrazione del sistema di acquisizione. Anche questa volta non ci preoccuperemo di un errore di zero, e, nell'evenienza di un significativo errore nella velocità del suono, faremo una calibrazione a due punti o segneremo i risultati e ne terremo conto in fase di analisi dei dati. Potremmo anche controllare, con un cronometro indipendente, il cronometro del sistema.

Moto oscillatorio

Si inclini il binario con una notevole pendenza (circa 10 gradi), lasciando il sonar nella parte bassa. Si colleghi poi il carrello all'altra estremità tramite una molla.



Si misuri staticamente il k della molla misurando la posizione di equilibrio col carrello da solo, col carrello con un peso e col carrello con due pesi. Si ha

$$(5.1) \quad k = \frac{\Delta M}{\Delta l} \cdot g \cdot \sin \theta$$

dove ΔM è la massa di un peso o di entrambi e Δl lo spostamento della posizione di equilibrio con un peso o con entrambi rispetto alla posizione di equilibrio col carrello da solo. Si calcolano due valori di k che, se la molla è lineare dovrebbero essere uguali. Ripetere la misura, dando un colpo al carrello, per valutare l'effetto dell'attrito statico: eventualmente ripetere più volte la misura e prendere la media.

Spostando il carrello dalla sua posizione di equilibrio, si osserva un'oscillazione che si smorza lentamente.

Le forze in gioco sono (prendendole positive se verso destra):

- gravitazionale $F_G = -M \cdot g \cdot \sin \theta$
- elastica $F_E = k \cdot \Delta l$
- d'attrito $F_A = \pm \mu_v \cdot M \cdot g \cdot \cos \theta$ opposta al moto

La posizione di equilibrio si ha per $\Delta l_0 = \frac{M \cdot g \cdot \sin \theta}{k}$.

Si osserva un moto oscillante del carrello, con periodo

$$(5.2) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}$$

Possiamo utilizzare questa relazione per fare una misura dinamica di k

$$(5.3) \quad k = 4\pi^2 \cdot \frac{M}{T^2}$$

da confrontare col valore ricavato staticamente.

Le forze gravitazionale ed elastica sono conservative e quindi non dissipano energia (ma la immagazzinano, quella gravitazionale quando il carrello sale, quella elastica quando scende). L'attrito dissipa energia, in modo proporzionale all'ampiezza di oscillazione. Si hanno quindi delle oscillazioni smorzate.

Vediamo come si riduce l'ampiezza di oscillazione. Supponiamo di partire con la massima estensione iniziale della molla, da fermo, d_1 (distanza dal punto di equilibrio) e supponiamo per fissare le idee che la posizione di partenza sia "superiore" al punto di equilibrio. A tale posizione corrisponde un'energia potenziale, rispetto al punto di equilibrio,

$$(5.4) \quad \begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} k \cdot [(\Delta l_0 - d_1)^2 - \Delta l_0^2] + M \cdot g \cdot d_1 \cdot \sin \theta = \\ &= \frac{1}{2} k \cdot [d_1^2 - 2 \cdot d_1 \cdot \Delta l_0] + M \cdot g \cdot d_1 \cdot \sin \theta = \\ &= \frac{1}{2} k \cdot d_1^2 \end{aligned}$$

(come si vede, è come se non ci fosse la forza di gravità, che è perfettamente bilanciata dall'allungamento della molla di Δl_0). Quando il carrello arriva al punto di equilibrio, questa energia in parte si è dissipata e in parte è diventata energia cinetica:

$$(5.5) \quad E_1' = \frac{1}{2} M \cdot v_1^2 = E_1 - \mu_v \cdot M \cdot g \cdot \cos \theta \cdot d_1$$

dove $\mu_v \cdot M \cdot g \cdot \cos \theta \cdot d_1$ è il lavoro compiuto dalla forza d'attrito volvente. Questa energia cinetica fa continuare l'oscillazione, fino ad arrivare alla massima distanza inferiore del carrello, d_2

(sempre dal punto di equilibrio); in questo tratto parte dell'energia viene dissipata in attrito e parte di nuovo convertita in energia potenziale della molla:

$$(5.6) \quad E_2 = \frac{1}{2}k \cdot d_2^2 = E_1 - \mu_v \cdot M \cdot g \cdot \cos \theta \cdot d_2 = E_1 - \mu_v \cdot M \cdot g \cdot \cos \theta \cdot (d_1 + d_2)$$

Ora, essendo noti d_1 e gli altri parametri, possiamo calcolare d_2 da

$$(5.7) \quad \frac{1}{2}k \cdot d_2^2 = \frac{1}{2}k \cdot d_1^2 - \mu_v \cdot M \cdot g \cdot \cos \theta \cdot (d_1 + d_2)$$

Si ha

$$(5.8) \quad \begin{aligned} d_2^2 - d_1^2 + 2 \cdot \frac{\mu_v \cdot M \cdot g \cdot \cos \theta}{k} \cdot (d_1 + d_2) &= 0 \\ \rightarrow \\ d_2 &= d_1 - 2 \cdot \frac{\mu_v \cdot M \cdot g \cdot \cos \theta}{k} \end{aligned}$$

Questa relazione ovviamente vale per tutte le successive elongazioni della molla

$$(5.9) \quad d_i = d_{i-1} - 2 \cdot \frac{\mu_v \cdot M \cdot g \cdot \cos \theta}{k}$$

(nel nostro caso le elongazioni con indice dispari sono superiori e quelle con indice pari inferiori, ma ciò solo perché siamo partiti con un'elongazione superiore). Notiamo che lo smorzamento di periodo in periodo è lineare ed è

$$(5.10) \quad \Delta d = 4 \cdot \frac{\mu_v \cdot M \cdot g \cdot \cos \theta}{k} = 4 \cdot \mu_v \cdot \cot \theta \cdot \Delta l_0 = \frac{1}{\pi^2} \cdot \mu_v \cdot T^2 \cdot g \cdot \cos \theta$$

Quindi dalla misura di Δd possiamo ricavare μ_v :

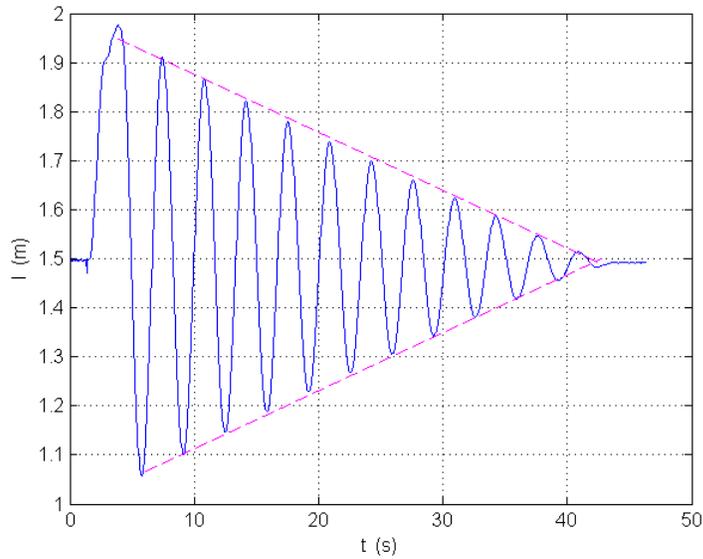
$$(5.11) \quad \mu_v = \frac{\pi^2 \cdot \Delta d}{T^2 \cdot g \cdot \cos \theta}$$

Si noti che, fissata l'inclinazione e il μ_v , il rapporto $T^2 / \Delta d$ è costante.

Alternativamente, usando la misura di k fatta staticamente, abbiamo

$$(5.12) \quad \mu_v = \frac{\Delta d \cdot k}{4 \cdot M \cdot g \cdot \cos \theta}$$

Ed ecco i risultati di una misura:



Si noti lo smorzamento (in Inglese damping) lineare.

L'equazione del moto è

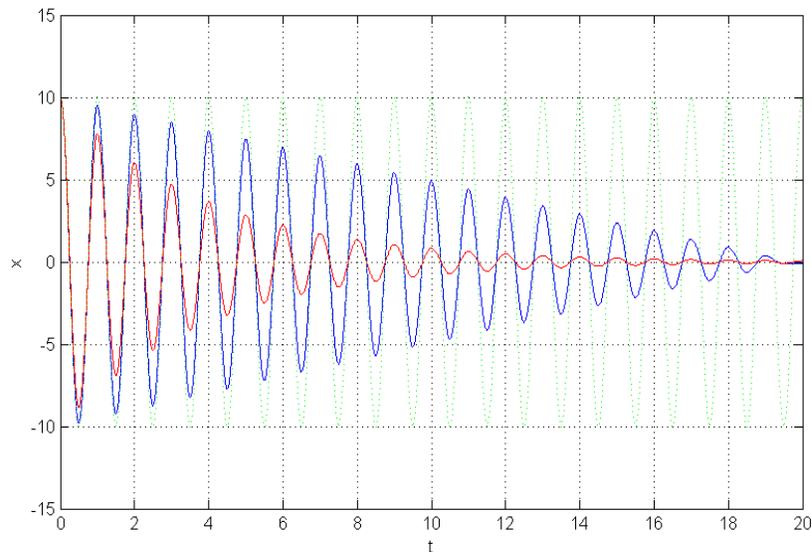
$$(5.13) \quad M \cdot \ddot{x} + \operatorname{sgn}(\dot{x}) \cdot \mu_v \cdot M \cdot g \cdot \cos \theta + k \cdot x = 0$$

dove x è la posizione rispetto al punto di equilibrio e sgn è la funzione segno. Notare la differenza con l'equazione dell'oscillatore armonico "lineare"

$$(5.14) \quad M \cdot \ddot{x} + \beta \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

per il quale lo smorzamento è esponenziale. Questo tipo di smorzamento è presente quando si ha il moto in un fluido viscoso (come è anche l'aria): si ha, in prima approssimazione e per basse velocità, un termine di forza ("resistenza del mezzo") proporzionale alla velocità. Tale termine è presente anche in questo caso, ma è trascurabile rispetto all'attrito volvente. Lo si può stimare con un'analisi dei dati un po' più raffinata.

Ecco il confronto tra i due (tratteggiato il caso senza smorzamento):



Si noti, tra l'altro, che nel caso dello smorzamento esponenziale, la frequenza di oscillazione dipende (anche se debolmente) dal coefficiente di smorzamento (come abbiamo mostrato nel paragrafo sull'oscillatore armonico). Ciò non accade nel caso del damping lineare. Per capire intuitivamente perché è così, notiamo che l'oscillazione **non** dipende da g , e il caso con attrito può essere visto come un caso in cui cambi soltanto g a seconda del segno di v . Nel caso invece dell'equazione (5.14) entra in gioco addizionalmente la derivata della posizione, il che può essere visto come un aumento della massa⁷².

Operativamente, per le misure:

- Pesare il carrello e il peso di piombo (circa 500 g ciascuno).
- Scegliere un'inclinazione ragionevole per il binario e misurarla; 10~15 gradi dovrebbero andare bene.
- Misurare staticamente la posizione di equilibrio della molla col carrello da solo, con uno e due pesi.
- Fare alcuni run di misura col carrello da solo.

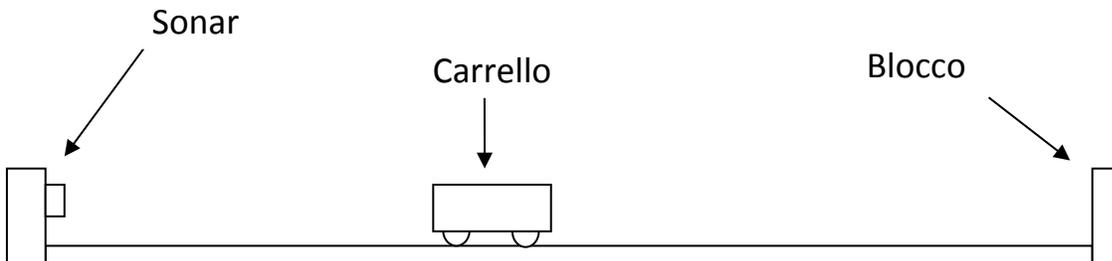
Per l'analisi dati, per ciascuno dei due casi con peso e senza peso:

- Misurare il periodo (fare la media su vari periodi).
- Misurare lo smorzamento per un periodo (fare la media su vari periodi).
- Misurare il k della molla sia staticamente (con l'allungamento) che dinamicamente (col periodo).
- Calcolare il coefficiente di attrito volvente.

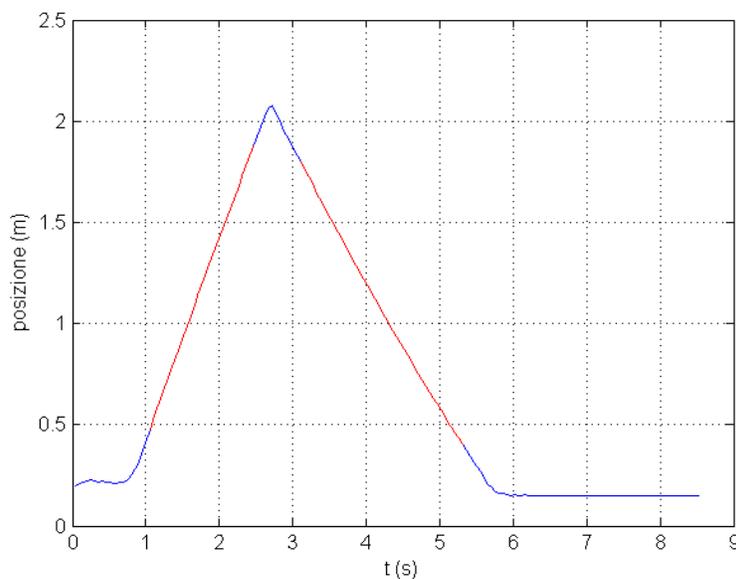
⁷² Un'analisi più dettagliata può farsi agevolmente col "metodo simbolico" o le trasformate di Laplace.

Moto piano non forzato (analisi dell'attrito)

Eseguiamo infine un semplice esperimento: col binario in piano, spingiamo il carrello verso il blocco, in modo che rimbalzi e torni indietro fermandosi prima di percorrere l'intero binario.



Un tipico grafico della posizione è il seguente:



In rosso sono evidenziati i due periodi analizzati con LabMecFit, nel primo il carrellino si allontana dal sonar, nel secondo si avvicina. Per ciascun periodo viene fatto il fit polinomiale con l'equazione

$$(5.15) \quad s = s_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Per i dati in figura, i risultati sono:

pezzo 1 coefficienti -0.641215, 1.088220, -0.027357,
incertezze 0.003509, 0.004143, 0.001170,
chi quadro 9.380654 N.g.l. 26 probabilità = 0.998838

pezzo 2 coefficienti 4.298915, -0.901692, 0.031652,
incertezze 0.006953, 0.003353, 0.000397,
chi quadro 41.306770 N.g.l. 42 probabilità = 0.501251

I coefficienti trovati sono ordinati per le potenze crescenti.

Quindi i due fit per i due periodi danno

$$(5.16) \quad \begin{cases} s_1 = s_{01} + v_{01} \cdot t + \frac{a_1}{2} \cdot t^2 \\ s_2 = s_{02} + v_{02} \cdot t + \frac{a_2}{2} \cdot t^2 \end{cases}$$

Si noti la leggera differenza nell'accelerazione tra le due direzioni del carrello, che probabilmente sono dovute a una piccola inclinazione residua del binario. Possiamo quindi prendere la media delle due accelerazioni $a = (|a_1| + |a_2|) / 2$ (di cui va calcolata anche l'incertezza). Da questo valore possiamo trovare il coefficiente d'attrito volvente

$$(5.17) \quad \mu_v = \frac{a}{g}$$

Per basse velocità possono entrare in gioco piccole imperfezioni delle ruote, piccoli incurvamenti del binario o altre cause aleatorie, che hanno come effetto variazioni dell'accelerazione. La ripetizione dell'esperimento è quindi utile.

Ed ecco il Quadro Riassuntivo da riempire:

Piano Inclinato II

Gruppo

Data

Calibrazione

d = 0.5 m	1 m	1.5 m	2 m
-----------	-----	-------	-----

Δd

errore di 0
errore di scala

Molla

massa carrello
massa peso 1
massa peso 2

Inclinazione binario

	periodo		smorz.		k		mu_v	
	valore	incertezza	valore	incertezza	valore	incertezza	valore	incertezza
solo carrello								
con 1 peso								
con 2 pesi								

Moto piano

	s0		v0		a		mu_v	
	valore	incertezza	valore	incertezza	valore	incertezza	valore	incertezza
in allontanamento								
in avvicinamento								

mu_v

A Roma $g = 9.8035 \text{ m/s}^2$

Il pendolo reversibile

La teoria è sviluppata nel capitolo sulle misure di accelerazione di gravità.

Si ha a disposizione un pendolo reversibile e un preciso sistema cronometrico elettronico. La procedura per la misura di g è la seguente:

- si verifica (ed eventualmente si corregge) l'orizzontalità del coltello.
- si eseguono alcune misure di periodo (col coltello alla massima elongazione) con differenti (ma piccole, < 5 gradi) ampiezze di oscillazione, valutando l'ampiezza θ_0 di oscillazione e ricavando l'andamento; confrontare con quello teorico:

$$(6.1) \quad T = T_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right)$$

Impostare sul sistema cronometrico un numero pari di passaggi (per esempio 10).

- fare misure a ogni 5 centimetri di spostamento del coltello-fulcro, ricavando il grafico T vs d (trascurando ovviamente la parte centrale e posizionando l'altro coltello a circa un quarto della sbarra).
- trovare due punti di eguale periodo del pendolo, da parti opposte. In pratica, scelto un punto da un lato, si identifica un (piccolo) segmento dall'altro lato che contiene il punto cercato, si calcola il periodo per gli estremi del segmento e quindi si interpola.
- Ripetere la misura posizionando questa volta i due coltelli pressappoco nelle due posizioni trovate e facendo due misure per lato nell'intorno. Si trovano così, con un'eventuale interpolazione, i due punti coniugati definitivi.
- Calcolare la lunghezza equivalente come la distanza tra i due coltelli posti nei due punti coniugati, e valutare g dall'equazione

$$(6.2) \quad g = \frac{4\pi^2 \cdot l_E}{T^2}$$

Il pendolo fisico

Un pendolo fisico è un corpo rigido libero di rotare attorno ad un asse fisso non passante per il suo centro di massa. Il moto del pendolo è completamente descritto dall'angolo di rotazione $\theta(t)$, che misuriamo per convenzione a partire dalla condizione di equilibrio. Lasciandolo libero a partire da un angolo non nullo, il pendolo oscilla.

Se l'asse è orizzontale, l'equazione del moto è, trascurando gli attriti che causano lo smorzamento dell'oscillazione,

$$(7.1) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mgd}{I} \cdot \sin\theta = 0$$

dove I è il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione, M è la sua massa, g l'accelerazione di gravità, d la distanza tra l'asse e il baricentro e θ è l'ampiezza dell'angolo di oscillazione.

Ricordiamo che nel caso del pendolo semplice l'equazione è

$$(7.2) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \sin\theta = 0$$

dove l è la lunghezza del pendolo. Quindi un pendolo fisico ha la stessa dinamica di un pendolo semplice con $l = \frac{I}{M \cdot d}$.

Se l'ampiezza massima dell'oscillazione è θ_0 , si trova che il periodo di oscillazione è

$$(7.3) \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{Mgd}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64} \cdot \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right)$$

Definiamo $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{Mgd}}$ il periodo per le piccole oscillazioni.

In questa esperienza utilizzeremo il pendolo Pasco, composto da una asticella che può essere fissata ad un perno tramite un bulloncino in posizione centrale o decentrata. Il perno è collegato ad un misuratore di rotazione interfacciato al computer. Sulla asticella possono essere fissati uno o più blocchetti di ottone che modificano il momento di inerzia del pendolo.



Operazioni iniziali

Misurare massa e dimensioni della asticella e dei blocchetti, la distanza b tra i due fori dell'asticella e il diametro del cerchietto di plastica usato per fissare l'asticella.

Verificare l'orizzontalità dell'asse di rotazione.

Predisporre il sistema per campionamento a 20 Hz e alta risoluzione (0.25° - 1440 punti a giro).

Misure ampiezza e periodo

Scelta una data configurazione del pendolo (scelto cioè il punto di sospensione e la posizione del/degli eventuali blocchetti, osserveremo l'ampiezza e il periodo delle oscillazioni. Queste informazioni possono ricavarsi direttamente dai grafici prodotti dal sistema di acquisizione DataStudio o, con maggiore efficienza, elaborando i dati archiviati dal sistema in un file.

Ciò può farsi in vari modi con un programma (per esempio in C o in Matlab). In alternativa si può importare i dati del file in un foglio Excel e quindi elaborare i dati come colonne Excel.

Esempio di foglio Excel:

colonna 1 (A) : ascissa temporale (da DataStudio)

colonna 2 (B) : angolo "rozzo" (da DataStudio)

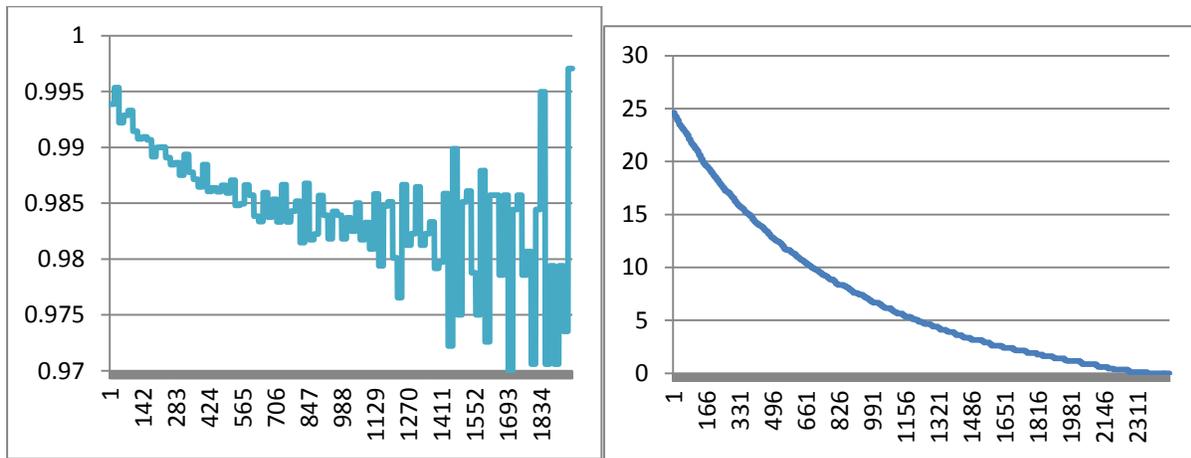
colonna 3 (C) : angolo corretto (B-media(B)) [in C2 =**B2-\$C\$1** e in C1 =**MEDIA(B2:B2516)**]

colonna 4 (D): tempo dell'inizio dell'oscillazione (passaggio per 0) [in D14 =**SE(E(C13<0;C14>=0);A13-C13*0.05/(C14-C13);D13)**]

colonna 5 (E): periodo [in E15 =**SE(D15>D14;D15-D14;E14)**]

colonna 6 (F): ampiezza [in F30 =**(MAX(C1:C30)-MIN(C1:C30))/2**]

Le colonne E e F possono essere utilizzate per fare ulteriori elaborazioni (per esempio per il calcolo di T_0) o possono essere graficate; ecco i grafici prodotti da Excel per il periodo e l'ampiezza:



Relazione ampiezza/periodo

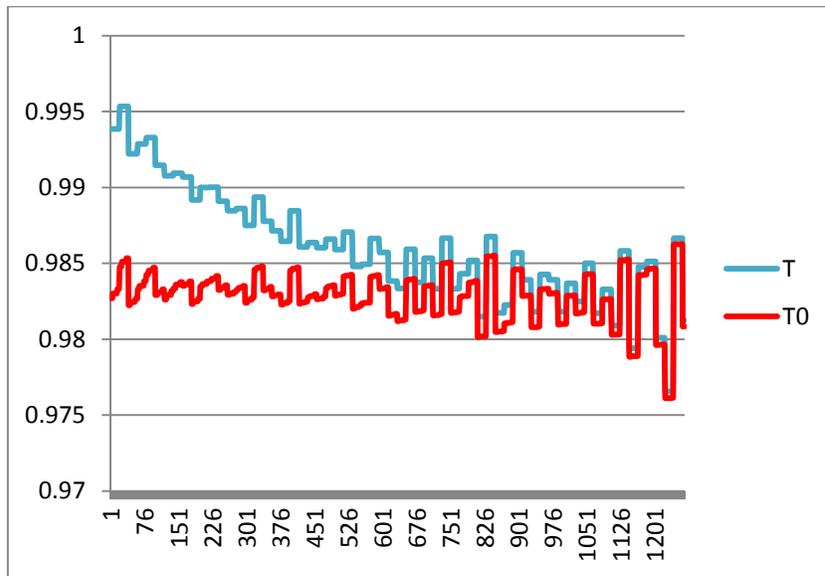
L'andamento teorico del periodo in funzione dell'ampiezza dell'oscillazione è, in prima approssimazione,

$$(7.4) \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{Mgd}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right) = T_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right)$$

Possiamo controllare se nel caso del nostro esperimento ciò sia verificato e misurare quanto vale T_0 . Ciò può essere fatto a partire dai valori di ampiezza e periodo calcolati col programma o Excel. Otteniamo per T_0

$$(7.5) \quad T_0 = \frac{T}{1 + \frac{1}{4} \cdot \sin^2 \frac{\theta_0}{2}}$$

Si può calcolare T_0 creando una nuova colonna (per esempio G) col comando ,
=E34/(1+0.25*SEN(F34*PI.GRECO()/360)^2) (il comando è, per la riga 34) . Ecco il grafico:



Calcolo del centro di massa e del momento di inerzia del pendolo

Per questi calcoli supponiamo che il montaggio dell'asticella sia perfettamente ortogonale all'asse di rotazione.

Per calcolare il centro di massa di un corpo rigido composto di più parti, ricordiamo che se ciascuna parte ha massa m_i e centro di massa \vec{x}_i , si ha per il c.d.m.

$$(7.6) \quad \vec{x} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{x}_i}{\sum m_i}$$

Per la simmetria del montaggio possiamo rappresentare il centro di massa con una singola coordinata che indicherà la distanza dall'asse di sospensione. Detta semplicemente d il valore in questa coordinata e d_i i centri di massa in questa coordinata delle varie parti, abbiamo

$$(7.7) \quad d = \frac{\sum m_i \cdot d_i}{\sum m_i}$$

Calcoliamo il momento d'inerzia del pendolo rispetto all'asse di rotazione. Ricordiamo i seguenti due teoremi:

- Il momento d'inerzia di un corpo rigido composto da più parti rispetto a un asse è dato dalla somma dei momenti d'inerzia rispetto all'asse delle varie parti.
- Il momento d'inerzia I di un corpo rispetto a un asse a è dato dalla

$$(7.8) \quad I = I_0 + M \cdot d^2$$

dove I_0 è il momento d'inerzia del corpo rispetto a un asse passante per il centro di massa e parallelo ad a , M la massa del corpo e d la distanza tra il centro di massa e l'asse (teorema di Huygens-Steiner).

Il nostro pendolo è composto da

- una asticella di massa M_a e lunghezza L_a , il cui centro di massa è nel centro (corrispondente al foro centrale). Essendo d_a la distanza tra l'asse e il centro di massa dell'asticella, il momento d'inerzia è dato da

$$(7.9) \quad I_a = \frac{M_a L_a^2}{12} + M_a d_a^2$$

il valore di d_a è 0 se si usa per la connessione all'asse rotante il foro centrale, ed è b (distanza tra i due fori) se si usa il foro superiore.

- n ($= 0, 1$ o 2) blocchetti di ottone fissati all'asticella. Ciascun blocchetto ha una massa M_i , altezza h_i , raggio esterno r_{i1} e raggio del foro r_{i2} e sia posizionato (posizione del centro di massa) a una distanza d_i dall'asse. L' i -esimo blocchetto ha un momento d'inerzia

$$(7.10) \quad I_i = \frac{M_i}{12} \cdot \left(3 \cdot (r_{i2}^2 + r_{i1}^2) + h_i^2 \right) + M_i \cdot d_i^2$$

- l'asse e il sistema di fissaggio all'asse: questa parte ha, grazie alla sua simmetria, la particolarità di avere il centro di massa sull'asse di rotazione del pendolo. Il momento d'inerzia I_x di questa parte del pendolo non può essere calcolato (non possiamo smontare il sistema), ma può valutarsi con un apposito esperimento. I_x è comunque molto più piccolo di quello delle altre parti e quindi in prima approssimazione si può trascurare, o comunque non occorre valutarlo con grande accuratezza.

Il momento d'inerzia del pendolo rispetto all'asse di rotazione è quindi dato da

$$(7.11) \quad I = I_x + I_a + \sum I_i$$

Misura di I_x

Supponiamo di avere un corpo, rotante attorno a un asse, composto di due parti, una di massa, centro di massa e momento d'inerzia noti M_0 , d_0 e I_0 e una di massa e momento d'inerzia ignoti M_x e I_x e centro di massa sull'asse. Si è così realizzato un semplice pendolo che ha periodo di oscillazione

$$(7.12) \quad T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + I_x}{(M_0 + M_x) \cdot g \cdot \frac{M_0 d_0 + M_x \cdot 0}{M_0 + M_x}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + I_x}{g \cdot M_0 \cdot d_0}}$$

Come si vede, nella relazione non compare M_x .

Possiamo utilizzare questa equazione per misurare I_x . Per far ciò fissiamo col nastro adesivo leggero un bullone (o qualsiasi piccola massa) di massa m sulla periferia del cerchietto di plastica di raggio r (senza il montaggio dell'asticella). Diamo un piccolo angolo di rotazione al sistema e osserviamo le oscillazioni.

Ricordiamo che non occorre una grande accuratezza nella misura di I_x , poiché il suo valore sarà sempre sommato agli altri termini che sono molto maggiori. Possiamo quindi usare metodi semplici per valutare T_0 , porre $I_0 = m \cdot r^2$ e porre semplicemente $g = 980 \text{ cm/s}^2$. Calcoliamo quindi

$$(7.13) \quad I_x = \frac{T_0^2 g \cdot m \cdot r}{4\pi^2} - m \cdot r^2$$

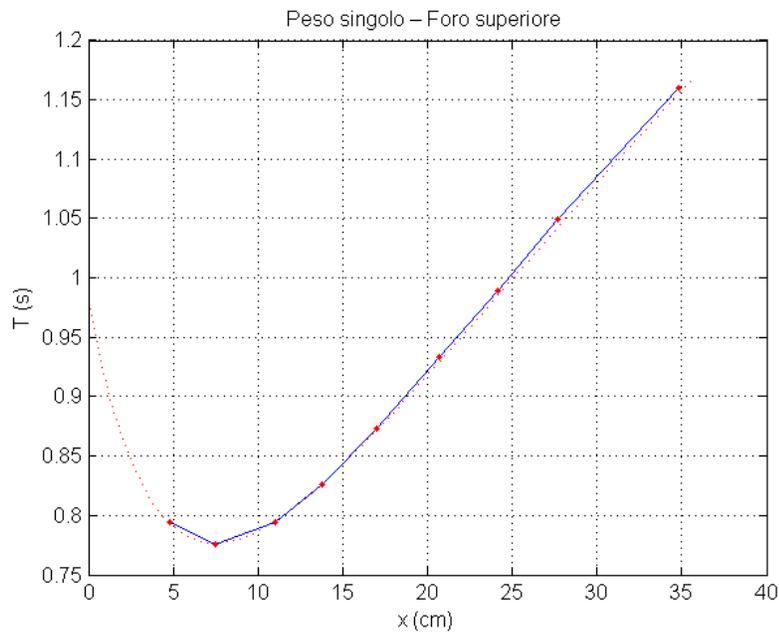
Si noti che, ovviamente, non ricaviamo informazioni su M_x .

Verifica del periodo

Possiamo procedere in due modi:

Usare il foro superiore ed un solo blocchetto:

Ecco il grafico dei valori di periodo trovati (in puntinato sono i valori attesi) al variare della posizione x del blocchetto:



Usare il foro centrale e due blocchetti:

Fissare un blocchetto nella parte centrale della metà superiore dell'asticella, e quindi l'altro blocchetto nella metà inferiore (ma in modo da lasciare il centro di massa nella metà inferiore. Si nota che si possono raggiungere periodi molto lunghi se il secondo blocchetto si avvicina molto alla posizione simmetrica a quella del primo blocchetto; se la raggiunge, il pendolo non ha più una posizione di equilibrio stabile e il periodo va all'infinito. Se il secondo blocchetto supera questa posizione, il pendolo inverte la sua posizione stabile (cioè si rigira). In questa configurazione si possono ottenere periodi molto lunghi con centro di massa molto vicino all'asse di rotazione.

Misura di g

Cerchiamo ora di ricavare il valore dell'accelerazione di gravità g a partire dalle osservazioni del pendolo fisico. L'equazione da utilizzare è

$$(7.14) \quad g = 4\pi^2 \cdot \frac{I}{T_0^2 \cdot M \cdot d}$$

dove I, M e d sono il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, la massa e la distanza del baricentro.

Ricordiamo però che non conosciamo parte della massa del pendolo. Poniamo $M = M_x + M_R$, dove M_x è la massa del perno e del sistema di bloccaggio all'asse e M_R è la restante parte. Non conoscendo M_x , non conosciamo neanche la posizione del centro di massa del pendolo. Tuttavia, poiché la M_x ha il centro di massa sull'asse, possiamo ottenere una nuova espressione sviluppando il prodotto M·d come

$$(7.15) \quad M \cdot d = (M_R + M_x) \cdot \frac{M_R \cdot d_R + M_x \cdot 0}{M_R + M_x} = M_R \cdot d_R$$

dove d_R è il centro di massa della parte restante.

Quindi possiamo usare

$$(7.16) \quad g = 4\pi^2 \cdot \frac{I}{T_0^2 \cdot M_R \cdot d_R}$$

dove

$$(7.17) \quad M_R = M_a + \sum M_i$$
$$d_R = \frac{M_a \cdot d_a + \sum M_i \cdot d_i}{M_R}$$

Per ottenere i migliori risultati occorre ridurre al minimo gli errori di posizione dei blocchetti e ciò può farsi per esempio non usando blocchetti o ponendo un solo blocchetto in posizioni in cui sia minimo l'errore di posizione (per esempio all'estremo).

Lo studio dell'incertezza della misura non è semplicissimo. In casi come questo è conveniente farlo tramite una simulazione (nel gergo dei fisici un "montecarlo").

Errori sistematici

In questa misura sono presenti vari errori sistematici. Ecco i più interessanti:

- **non orizzontalità dell'asse di rotazione:** si riduce il valore della forza (di gravità) che richiama il pendolo nella posizione di equilibrio; in altri termini il pendolo "vede" un minor valore di g . Se l'errore di orizzontalità è l'angolo ϕ , si ha un errore sistematico relativo $\cos(\phi)-1$.
- **non ortogonalità del pendolo con l'asse di rotazione:** poiché nel calcolo del momento d'inerzia noi supponiamo che l'asticella sia ortogonale all'asse di rotazione, è come se riducesse il momento d'inerzia "effettivo" rispetto all'asse. Infatti, poiché nella (7.16) poniamo un valore più elevato di I , l'effetto aumenta il valore di g .
- **sostegno non perfettamente rigido:** il sostegno oscilla anch'esso col pendolo e quindi è come se il pendolo fosse più "lungo"; l'effetto è quindi quello di valutare un g inferiore
- **errore sull'orologio dell'acquisizione**
- **errore di modello** (per esempio asimmetria nella bacchetta dovuta alla presenza del foro superiore)
- **presenza dello smorzamento dovuto ad attrito con l'aria** (trascurato in questo studio): aumenta il periodo e quindi diminuisce il valore di g calcolato con la (7.16); nel nostro caso questo effetto è sicuramente trascurabile.

Smorzamento

Ci sono due principali cause di attrito nel pendolo in studio:

- **attrito viscoso con l'aria**, che si manifesta come una forza che si contrappone al moto, proporzionale con buona approssimazione nel nostro caso alla velocità di rotazione
- **attrito al perno**, in pratica attrito volvente con le sfere dei cuscinetti a sfere che sostengono il perno; questo attrito è schematizzabile come una forza costante agente tangenzialmente al perno e che si contrappone alla rotazione.

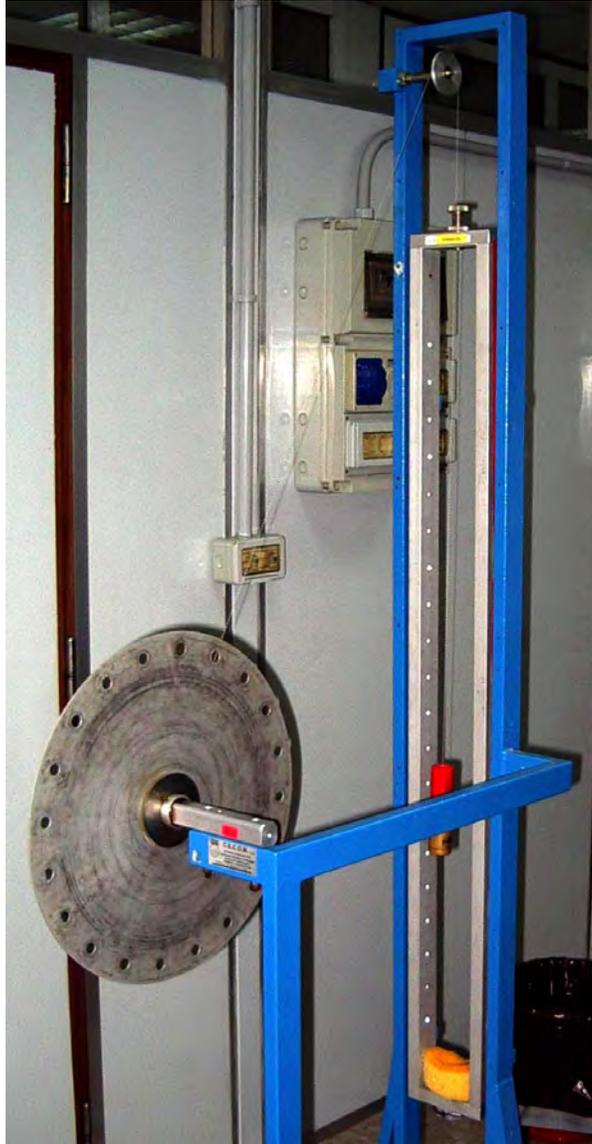
L'equazione è

$$(7.18) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\gamma \cdot \frac{d\theta}{dt} + k_p \cdot \text{sign}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) + \frac{Mgd}{I} \cdot \sin\theta = 0$$

dove il termine $2\gamma \cdot \frac{d\theta}{dt}$ descrive l'attrito viscoso e produce uno smorzamento esponenziale, mentre il termine $k_p \cdot \text{sign}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ descrive l'attrito al perno e produce uno smorzamento lineare. Questo secondo termine prevale quando il periodo è molto lungo e il centro di massa è vicino all'asse.

Il volano

Per questa esperienza si utilizza un disco di alluminio collegato tramite un filo passante per una carrucola, a un peso in caduta. Il filo, avvolto intorno all'asse del disco, lo fa ruotare. Sul disco possono essere montate coppie di bulloni che ne aumentano il momento di inerzia.

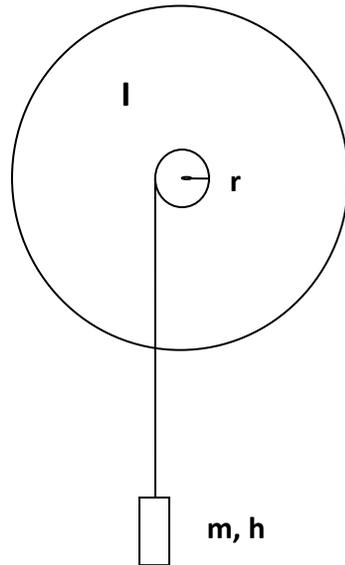


Il sonar, montato sotto il peso, ne misura la posizione e quindi monitora la rotazione del disco.

Descriviamo brevemente il moto del volano, e quindi passeremo a illustrare la procedura sperimentale da eseguire.

Moto del volano

La situazione è la seguente:



Sia r il raggio della puleggia⁷³ su cui si avvolge il filo, m il peso attaccato al filo e sia h la sua quota, e sia I il momento d'inerzia del disco (con gli eventuali bulloni) rispetto all'asse. Trascuriamo l'elasticità del filo, che ha vari effetti sul moto, tra l'altro rendendolo in certi casi un po' "singhiozzante", come trascuriamo l'eventuale moto "pendolante" del peso.

Avvolgiamo il filo e quindi, facendo attenzione a evitare pendolamenti, lasciamo cadere il peso. Il peso scenderà con un moto accelerato, e nelle ipotesi semplificative che abbiamo posto,

$$(8.1) \quad dh = -r \cdot d\alpha$$

essendo α l'angolo di rotazione del volano (che convenzionalmente in questa prima fase assumeremo crescente col diminuire di h); cioè ci sarà perfetta proporzionalità tra il moto rettilineo del peso e la rotazione del volano, che sarà anch'essa quindi accelerata.

Quando il filo è completamente svolto, il volano, per inerzia, continua nella sua rotazione, facendo riavvolgere il filo, questa volta però nel verso opposto. Il peso sarà trascinato in alto, e inizierà un moto decelerato; la relazione tra h e α ora è

$$(8.2) \quad dh = r \cdot d\alpha$$

Il moto di rotazione continua fino ad un'altezza un po' inferiore a quella di partenza (a causa dell'energia dissipata per i vari attriti, quindi ricomincia nell'altro verso (il filo nel moto di risalita si era avvolto nell'altro verso). E tutto ricomincia come prima, ma con la rotazione nell'altro verso.

⁷³ A rigore andrebbe considerato aggiuntivamente anche il raggio del filo che si avvolge e, se l'avvolgimento avviene su più strati, il valore da aggiungere varia nel tempo, al variare degli strati.

L'equazione che descrive il fenomeno è

$$(8.3) \quad M_a = \frac{dP_a}{dt}$$

dove

$$(8.4) \quad M_a = M_{a \text{ attiva}} + M_{a \text{ passive}} = \pm r \cdot m \cdot g + M_{attr}$$

è il momento delle forze rispetto all'asse di rotazione, dovute al peso (attiva) e agli attriti (passive, che si oppongono al moto) e

$$(8.5) \quad P_a = r \cdot m \cdot \frac{dh}{dt} + I \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

è il momento della quantità di moto del sistema rispetto all'asse di rotazione. L'equazione del moto quindi diventa

$$(8.6) \quad r \cdot m \cdot g \pm M_{attr} = (m \cdot r^2 + I) \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \left(m \cdot r + \frac{I}{r}\right) \cdot \frac{d^2h}{dt^2}$$

espressa in termini dell'angolo di rotazione o della quota (a parte inessenziali segni meno a seconda della convenzione scelta).

Il momento di inerzia è dato da

$$(8.7) \quad I = \int_{\text{su tutto il volano}} \rho^2 dm = I_0 + 2n \cdot R^2 \cdot m_B$$

dove ρ è la distanza della masserella dm dall'asse di rotazione; l'integrale è esteso a tutto il volume del volano. I_0 è il momento di inerzia del disco senza bulloni, n il numero di coppie di bulloni montati sul disco, m_B la massa di ogni bullone con dado e R la distanza dei bulloni dall'asse di rotazione.

Le forze passive sono

- l'attrito volvente, che è indipendente dalla velocità e può essere visto come una forza che si sottrae alla forza peso del peso quando questo è in discesa, mentre si somma a questa quando il peso è tirato verso l'alto.
- l'attrito dell'aria, proporzionale alla velocità e di verso contrario ad essa.
- le dissipazioni anelastiche che si hanno durante lo "strappo" quando il peso, alla massima velocità, svolto il filo, cambia direzione. Questo termine non gioca nel normale moto (in salita o in discesa) del peso, ma entra nel bilancio complessivo per il calcolo dell'energia dissipata in un ciclo completo discesa-risalita.

Se si può trascurare l'attrito dell'aria, l'integrazione dell'equazione del moto (del peso) dà

$$(8.8) \quad h(t) = h_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

quindi si ha un moto con accelerazione costante. Questa accelerazione è differente quando il moto del peso è verso l'alto o verso il basso

$$(8.9) \quad a = \frac{g \pm M_{attr}/mr}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

Se invece l'attrito con l'aria non è trascurabile, si può dimostrare che, per piccoli valori di questo, si ha⁷⁴

$$(8.10) \quad h(t) = h_0 + v_1 \cdot t + \frac{1}{2} a_1 \cdot t^2 - \gamma \cdot a_1 \cdot t^3$$

in questo caso l'accelerazione varia nel tempo; il coefficiente γ è proporzionale all'intensità dell'attrito con l'aria.

Notare che se si vuole conoscere l'accelerazione e la velocità dall'equazione di terzo grado, occorre definire "a che tempo": per esempio può essere interessante conoscere l'accelerazione al culmine della traiettoria e la velocità al passaggio (anche non effettivo) per quota 0. Un analogo problema si ha con l'equazione del secondo grado, per la valutazione della sola velocità.

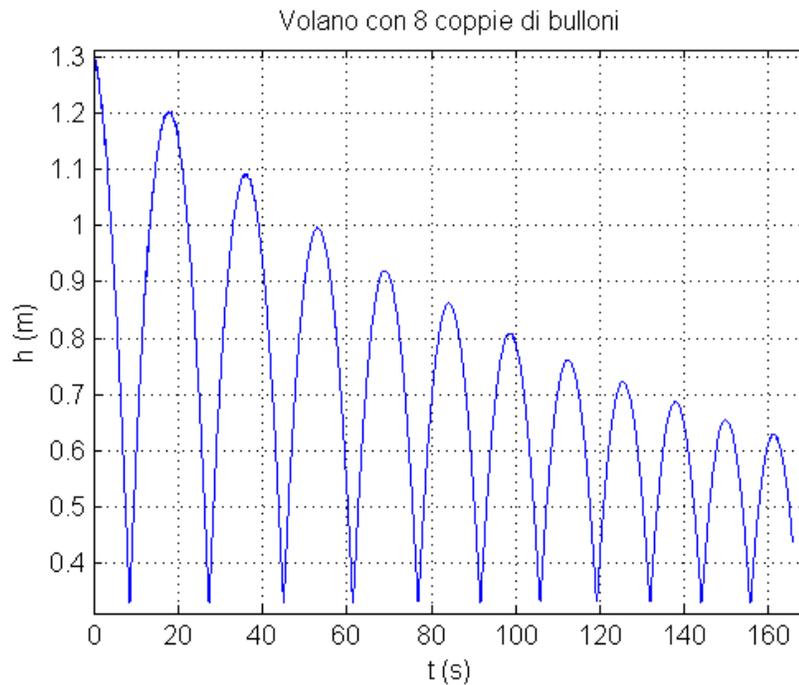
⁷⁴ Deriva dall'equazione di moto di un punto materiale sottoposto alla forza di gravità e ad attrito viscoso:

$$v(t) = v_\infty - (v_\infty - v_0) \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

dove $v_\infty = \frac{mg}{\beta}$.

Procedura sperimentale

Si fanno varie serie di misure, ognuna con varie salite e discese, cercando di evitare dondolamenti e oscillazioni del peso, senza bulloni, con una coppia, con 2, con 4 e con 8.



Si passa quindi all'analisi dei dati prodotti dal sonar (quota del peso in funzione del tempo).

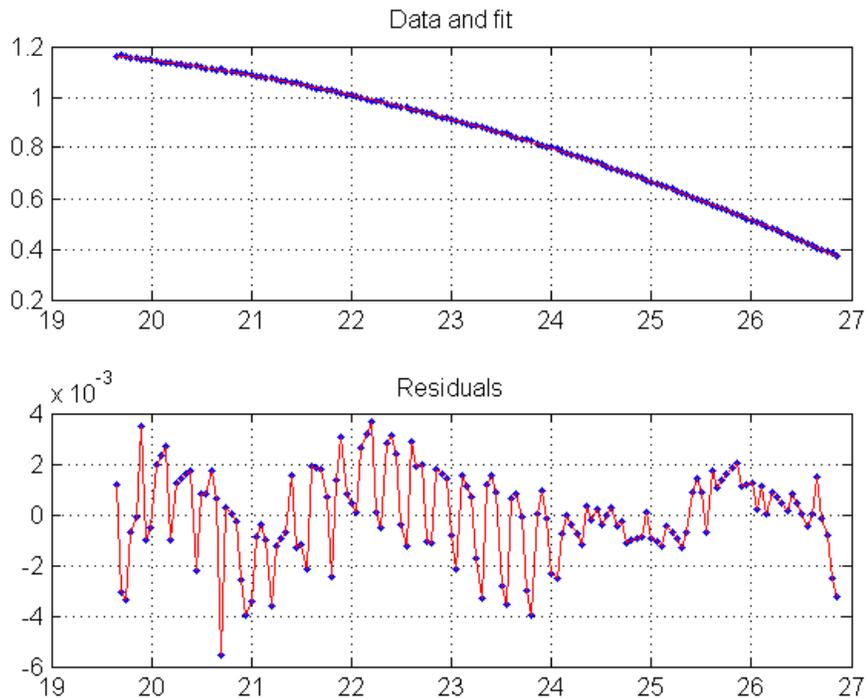
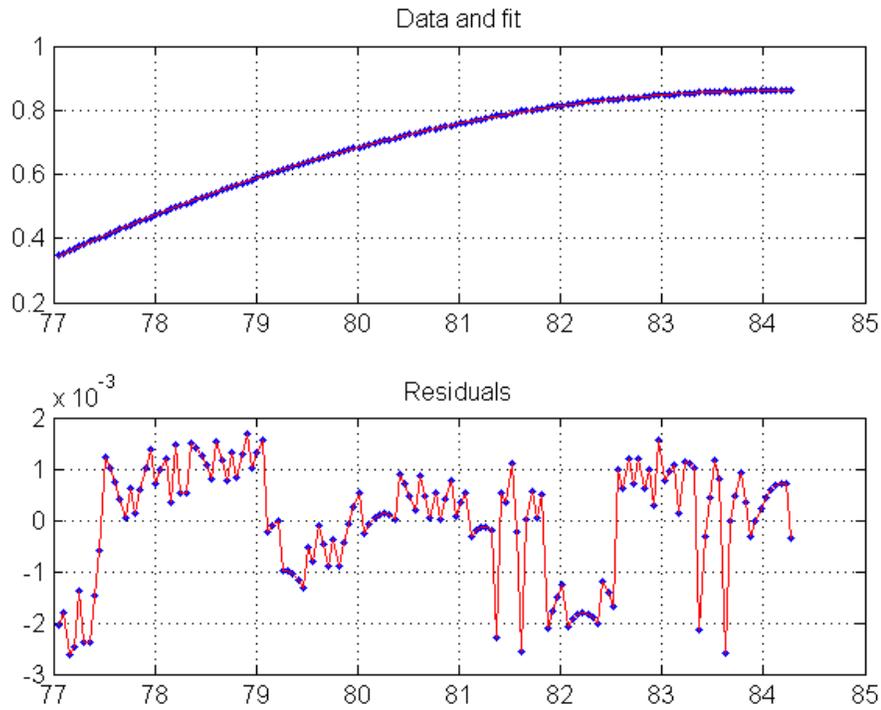
Nella prima parte (obbligatoria) trascureremo l'attrito con l'aria e quindi faremo dei fit polinomiali del secondo ordine di segmenti di traiettoria in un solo verso (solo salita o solo discesa). Ciò perché nella salita le forze agenti (trazione del filo dovuta al peso e attrito volvente) agiscono entrambe nello stesso verso (contrario al moto), mentre in discesa queste due forze agiscono in verso opposto l'una dall'altra (e la risultante ovviamente agisce nel verso del moto).

Si sceglieranno, per i fit, delle salite o discese abbastanza "buone", cioè senza disturbi visibili.

Ecco due esempi di fit, con i residui. Nella parte superiore delle figure ci sono i punti sperimentali (in blu) e il fit (in rosso – non è visibile nessuna differenza). Nella parte inferiore sono rappresentati i residui (punti blu uniti da una spezzata rossa).

Si noti che i residui sono dell'ordine dei millimetri, cioè circa tre ordini di grandezza sotto i valori dello spostamento.

Si noti inoltre, soprattutto dal secondo grafico, la presenza del moto oscillatorio "a singhiozzo" che si evidenzia nelle grandi oscillazioni sui residui.



Per ogni “numero di bulloni” si calcoleranno quindi l’accelerazione in salita a_s e quella in discesa a_D (per quanto detto, dovrebbe risultare $|a_s| > |a_D|$).

La valutazione dell'accelerazione dovuta alle forze attive (la forza di gravità sul peso) è ottenuta facendo la media delle due accelerazioni (la parte dovuta all'attrito volvente appare nelle due con diverso segno e quindi nella media si cancella).

La valutazione dell'accelerazione dovuta all'attrito volvente, viceversa, è ottenuta prendendo la metà della differenza tra le due accelerazioni.

Abbiamo visto che l'accelerazione dovuta a g è

$$(8.11) \quad a = \frac{g \cdot mr^2}{mr^2 + I}$$

(m essendo la massa del peso ed r il raggio del rocchetto) e quindi l'inverso di a è

$$(8.12) \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{g} \cdot \left(1 + \frac{I}{mr^2} \right)$$

quindi cresce linearmente con I .

D'altronde sappiamo che

$$(8.13) \quad I = I_0 + 2n \cdot R^2 \cdot m_B$$

dove n è il numero di coppie di bulloni, R la distanza dei bulloni dal centro e m_B la massa di un bullone (con dado).

Verifichiamo che il grafico di $1/a$ in funzione del numero dei bulloni è lineare. Dalle precedenti formule quindi ricaviamo il valore di I_0 .

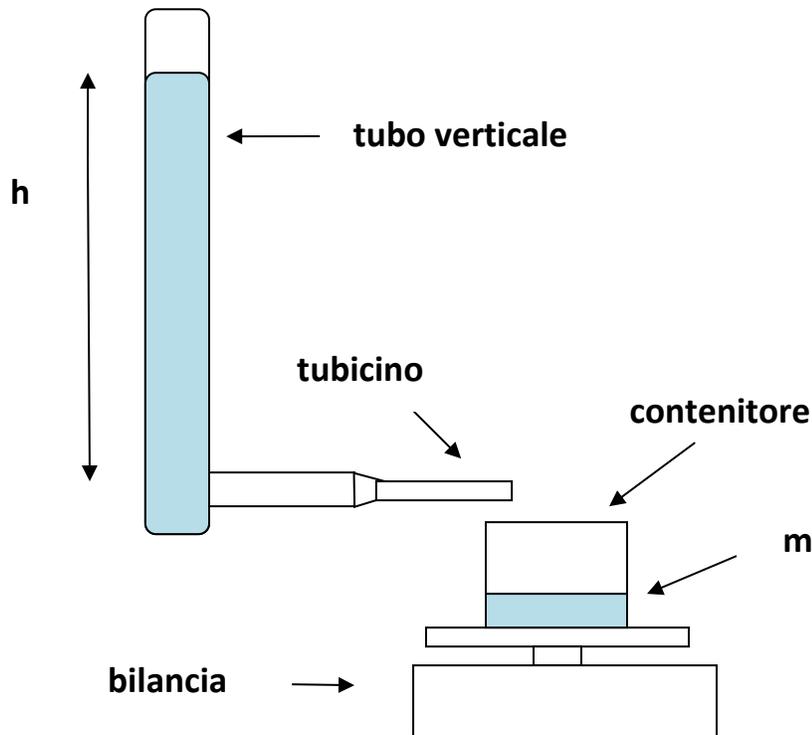
Facoltativo

- Fare i fit al terzo ordine per valutare la presenza dell'attrito viscoso dell'aria
- Valutare la perdita totale di energia in ogni ciclo discesa-risalita e confrontarla con la perdita di energia dovuta ad attrito volvente.
- Un modo alternativo per calcolare il coefficiente di attrito volvente è calcolando la perdita di energia dovuta ad esso (cioè il lavoro della forza passiva lungo una discesa e una risalita) come la differenza di energia potenziale (dalla differenza di quota) e la differenza di energia cinetica un po' prima e un po' dopo l'"urto anelastico" (tale differenza di energia cinetica ci dà l'energia dissipata in quest'urto).

Fluidi

Lo scopo di questa esperienza è lo studio del flusso (di acqua) attraverso dei tubicini.

È disponibile un grosso tubo di vetro che si può riempire d'acqua. Nella parte inferiore può essere connesso un tubicino attraverso il quale si svuota l'acqua. L'acqua fuoriuscita dal tubicino va in un contenitore posto su una bilancia collegata al computer: viene così misurata in continuazione la quantità di acqua nel contenitore (circa una misura al secondo).



Dalle misure di massa dell'acqua nel contenitore possiamo ricavare:

- il livello dell'acqua nel tubo verticale e quindi la pressione
- il flusso di acqua attraverso al tubicino orizzontale e quindi la velocità

Va preliminarmente misurato il diametro D del tubo verticale, quindi valutata la sezione

$S = \frac{\pi}{4} \cdot D^2$ e l'altezza h_0 a cui viene riempito inizialmente d'acqua (questa altezza viene misurata

tra il pelo dell'acqua e il livello a cui si trova il tubicino orizzontale).

Controllare che sia $S \cdot h_0 = \frac{m_0}{\rho_{H_2O}}$, dove m_0 è la massa totale dell'acqua che si scarica nel

contenitore e ρ_{H_2O} la densità dell'acqua.

Per questa esperienza è un po' più comodo usare il sistema CGS: così si ha il valore della viscosità in poise e $\rho_{H_2O} = 1$, oltre che avere numeri più comodi.

Abbiamo a disposizione i seguenti tubicini (misure in cm):

colore	diametro d	lunghezza l
bianco	0.100	20
bianco	0.100	10
bianco	0.100	8.5
marrone	0.140	8.0
bian e marr	0.180	7.5
rosso	0.215	9.9
grigio	0.300	9.5

L'incertezza sulla lunghezza è di 0.1 cm, sul diametro di 0.005 cm.

La procedura sperimentale è la seguente:

- si vuota il contenitore, lo si pone sulla bilancia e la si azzerava
- si chiude il rubinetto
- si riempie il tubo verticale fino al livello h_0 stabilito
- si fa partire l'acquisizione da DataStudio
- si apre il rubinetto, facendo attenzione che l'acqua vada tutta nel contenitore, eventualmente spostando lentamente avanti o indietro il tubo verticale

Una volta presi i dati $m(t)$ per tutti i tubicini, si passa all'elaborazione.

Occorre ricavare da $m(t)$ la pressione, la velocità dell'acqua e il numero di Reynolds. Si ha:

- **pressione:**

calcoliamo l'altezza del pelo dell'acqua

$$h(t) = h_0 - \frac{m(t)}{S \cdot \rho_{H_2O}}$$

e da questo possiamo ricavare la pressione⁷⁵, o più correttamente, la differenza di pressione $\Delta P(t) = h(t) \cdot g \cdot \rho_{H_2O}$

⁷⁵ In CGS la pressione si misura in dine/cm²; nel nostro caso può essere utile esprimere la pressione in g_{peso}/cm², che numericamente è uguale a h espresso in cm.

- **velocità:**

la velocità dell'acqua è proporzionale alla derivata rispetto al tempo di $m(t)$. Essendo

$s = \frac{\pi}{4} d^2$ la sezione del tubicino (d essendone il diametro), si ha

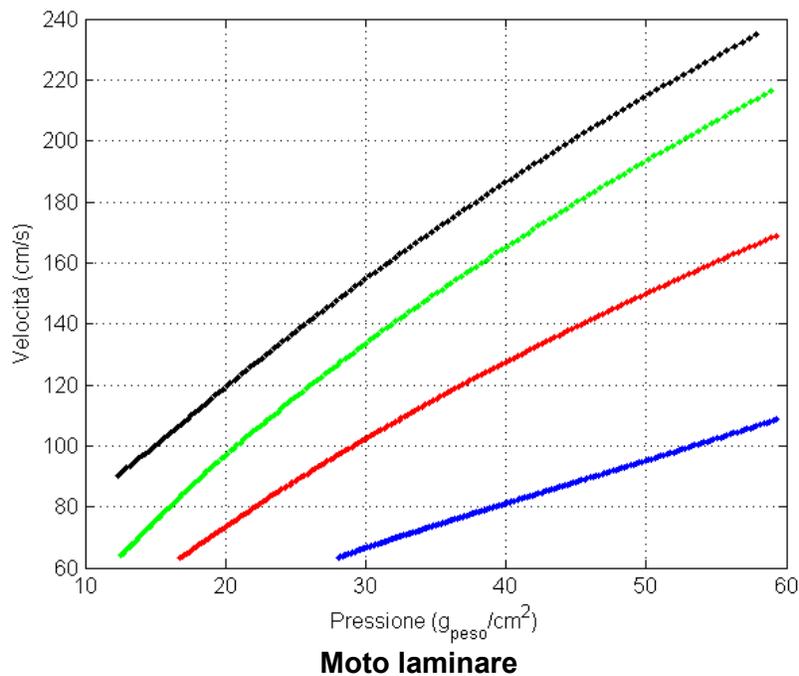
$$v(t) = \frac{\dot{m}(t)}{s \cdot \rho_{H_2O}}$$

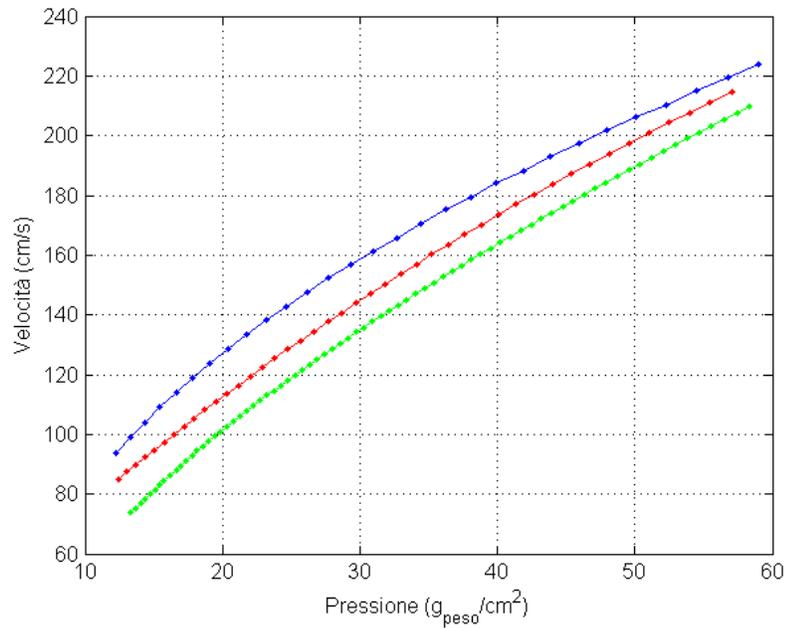
La valutazione di $\dot{m}(t)$ può farsi in molti modi. Uno particolarmente buono è fare il fit polinomiale di $m(t)$ nel pezzo di interesse (di ordine 4 dovrebbe bastare) e quindi calcolare la derivata del polinomio, ricordando che

$$\frac{d\left(\sum_{k=0}^4 a_k \cdot t^k\right)}{dt} = \sum_{k=1}^4 k \cdot a_k \cdot t^{k-1}$$

In questo modo dovrebbero “scompare” gli errori casuali e quelli di quantizzazione di campionamento (equiparabili a errori di lettura).

Dalla $\Delta P(t)$ e $v(t)$ ricaviamo la relazione $v(\Delta P)$. Eccone degli esempi, per moto laminare e turbolento:





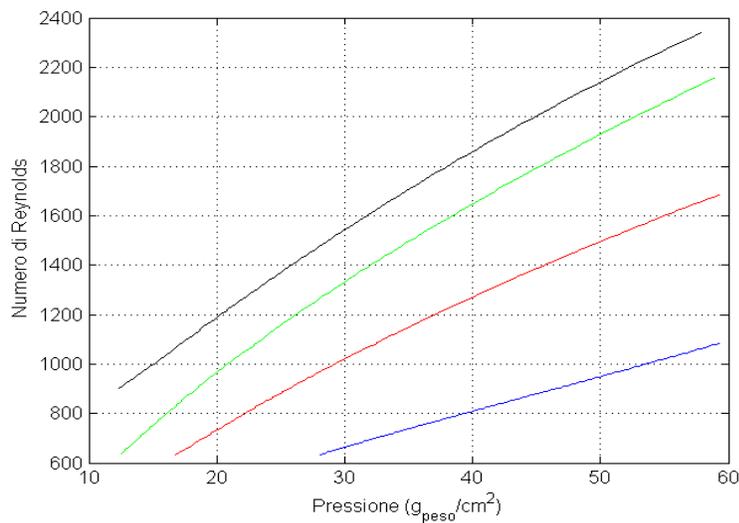
Moto turbolento (non per basse pressioni)

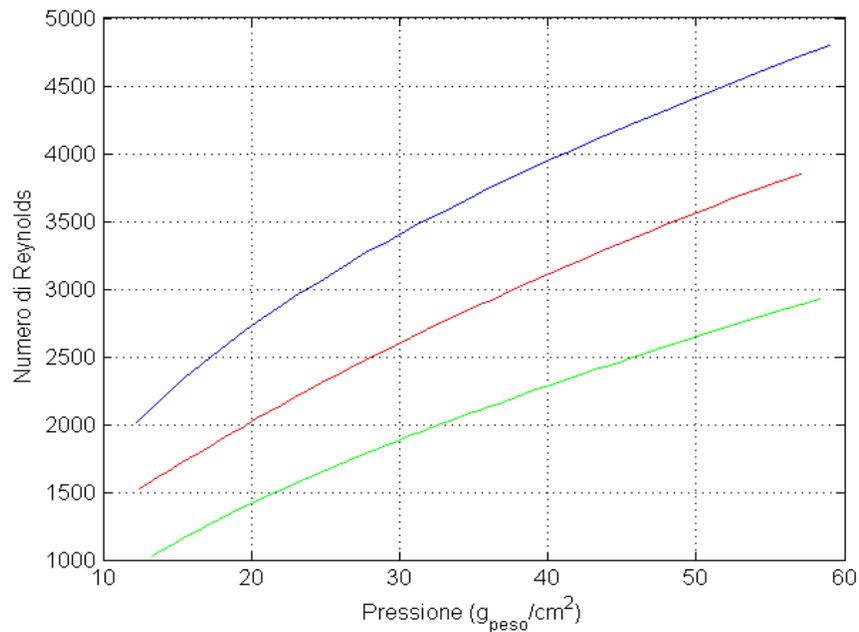
- **numero di Reynolds:**

possiamo ricavarlo da $v(t)$ dalla

$$Re(\Delta P) = \frac{d \cdot \rho_{H_2O} \cdot v(\Delta P)}{\eta}$$

Il valore di η dipende molto dalla temperatura. A circa 25 °C, è circa 0.009 poise. Ecco esempi di grafici ottenuti (relativi ai grafici precedenti), da cui si deduce che dei grafici precedenti, il primo ha numeri di Reynolds più bassi, compatibili con moto laminare e il secondo numeri di Reynolds più alti, compatibili con moto turbolento:





Ricordiamo le equazioni (24.5) e (24.12), che danno le velocità attraverso tubi nel caso laminare e

in quello turbolento. Si vede che nei due casi i valori $A = v \cdot \frac{l}{r^2}$ e $B = v \cdot \sqrt{\frac{l}{r}}$

sono, fissata la differenza di pressione, costanti rispettivamente per moto laminare e moto turbolento. Calcoliamo quindi le espressioni A e B per tutti i tubicini (scelta una differenza di pressione abbastanza alta) e verifichiamo la costanza per le due categorie.

Calcoliamo quindi, usando la (24.5), il coefficiente di viscosità, per tutti i casi di moto laminare (tubicini con $d=1$ mm).

Calcoliamo quindi il coefficiente λ , usando la (24.12), dalle misure degli altri tubicini, per tutti i casi di moto turbolento.

Acquisizione dati e Software

Il sistema di acquisizione dati della Pasco

Il sistema di acquisizione dati della Pasco si basa su tre elementi:

- i sensori
- l'interfaccia
- il software di acquisizione

Il sensore di moto rettilineo

Nel sistema Pasco esistono varie decine di sensori di vario genere (di forza, di temperatura, di corrente, di intensità luminosa,...). Per i nostri strumenti utilizzeremo essenzialmente il sensore di moto rettilineo CI-6742.

Questo è un sonar che emette treni di 16 impulsi di ultrasuoni a 49 kHz; dal tempo intercorrente tra l'invio e la ricezione viene calcolata la distanza dell'oggetto che ha riflesso indietro gli impulsi, supponendo che la velocità del suono nell'aria sia di 344 m/s. Il numero di treni di impulsi emessi al secondo è regolabile tra 5 e 120 e quindi si possono avere da 5 a 120 misure di posizione al secondo. Ma più si aumenta la frequenza dei treni di impulsi, minore è la massima distanza misurabile: infatti un solo treno di impulsi può essere in "volo" ad un dato istante. In pratica si ha che a 5 Hz si può misurare fino a 10 m, a 120 Hz fino a 60 cm. Si può anche selezionare il guadagno (deviatore sulla testa del sonar), e con il guadagno basso al massimo si arriva a 3 m, mentre con il guadagno alto si arriva a 10 m, ma con possibili disturbi. La distanza minima di misura è di circa 15 cm.



Un problema di questo sensore (con l'attuale software di acquisizione) è che le misure di distanza sono assegnate al tempo in cui vengono ricevuti gli impulsi riflessi, mentre le misure sono relative al tempo medio tra il tempo di trasmissione e il tempo di ricezione.

Questo crea un errore sistematico nella valutazione della velocità, che, per piccole velocità $v \ll c$ (essendo c la velocità del suono nell'aria), è, in valore relativo, di circa v/c , positivo per oggetti in avvicinamento e negativo per oggetti in allontanamento.

L'interfaccia

Per portare i segnali al computer occorre un'interfaccia. In laboratorio viene usata l'interfaccia ScienceWorkshop 500. Essa ha due canali digitali e tre analogici. Può lavorare fino a una frequenza di acquisizione di 500 misure al secondo in modo continuo, o fino a 20000 misure al secondo in modo "burst", utilizzando una memoria interna (buffer) di 20000 misure e trasmettendo quindi il tutto alla velocità di 500 misure al secondo.

Può lavorare anche scollegata dal computer (si acquisiscono i dati nella memoria interna e quindi, una volta collegata al computer, si scaricano).

È collegabile al computer tramite l'interfaccia seriale (RS232).



Il software di acquisizione DataStudio

Il software di acquisizione (per computer Windows) è il DataStudio. Esso funziona sia per gestire l'acquisizione dati, sia per l'analisi dei dati raccolti.

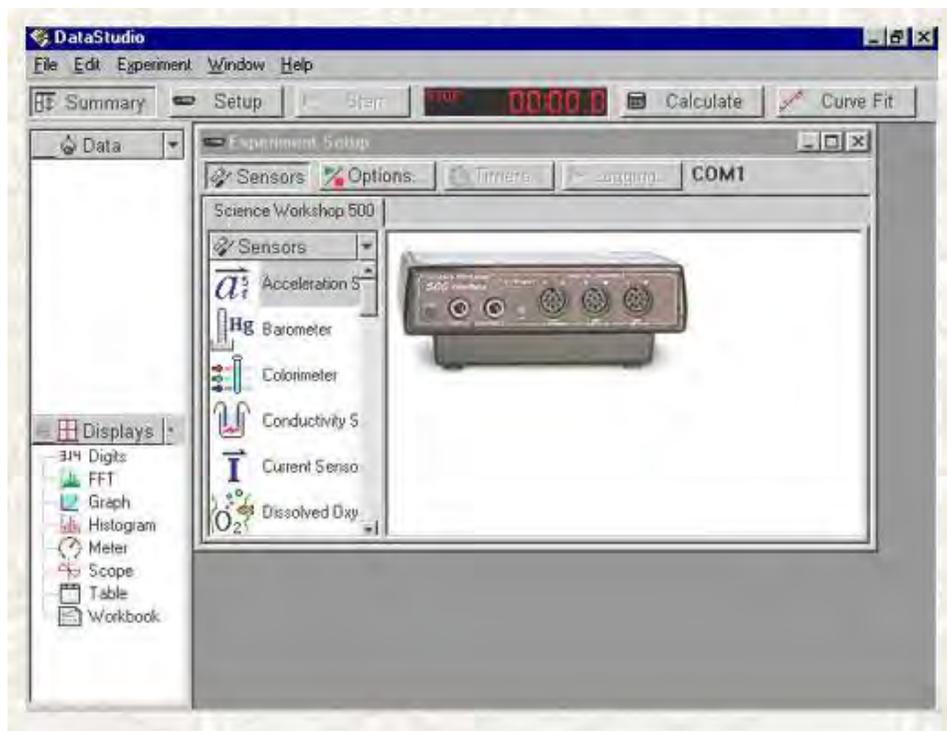
Prima di far partire il programma, deve essere collegata l'interfaccia.

Alla partenza si apre una finestra in cui si chiede il modo di utilizzo del programma:

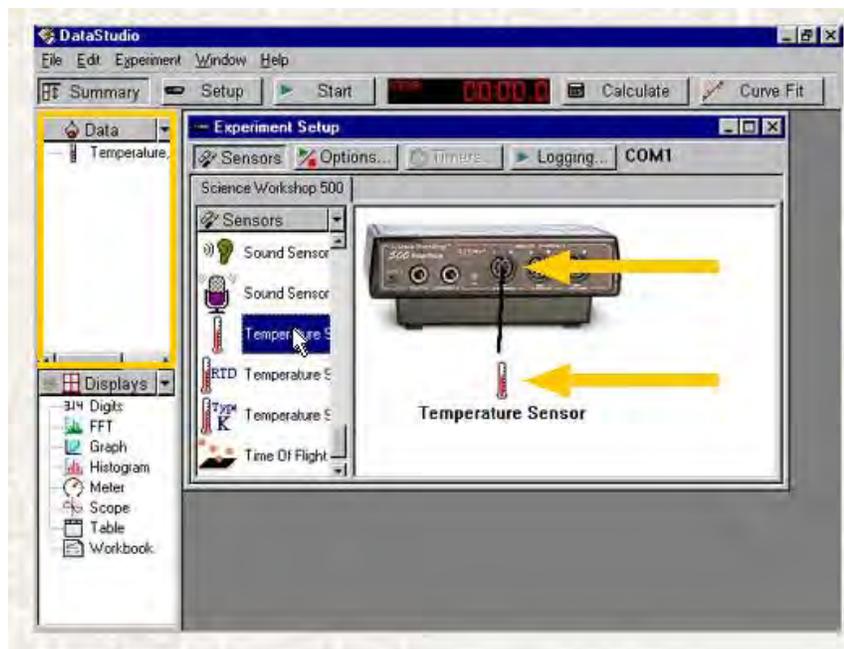


Figura 2: finestra di scelta della modalità di utilizzo di DataStudio

Se si chiede di iniziare un nuovo esperimento, compare

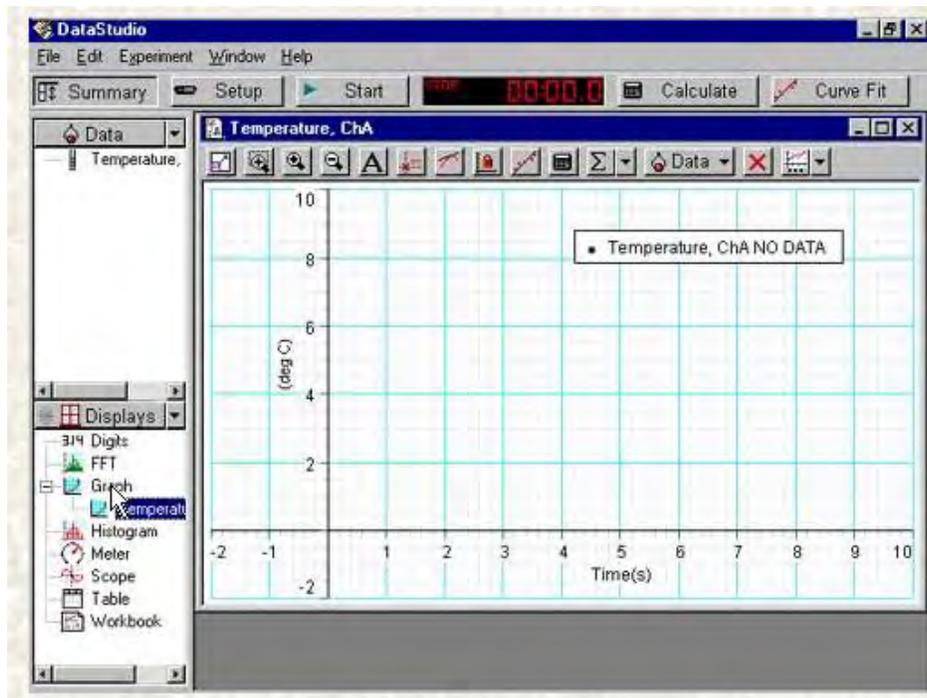


e quindi si sceglie il sensore nella lista e il programma invita a collegarlo



Se necessario, si può quindi calibrare il sensore (per il sensore di moto rettilineo, in genere c'è un errore di qualche %).

Una volta collegato, si sceglie cosa usare come display (per esempio un grafico)



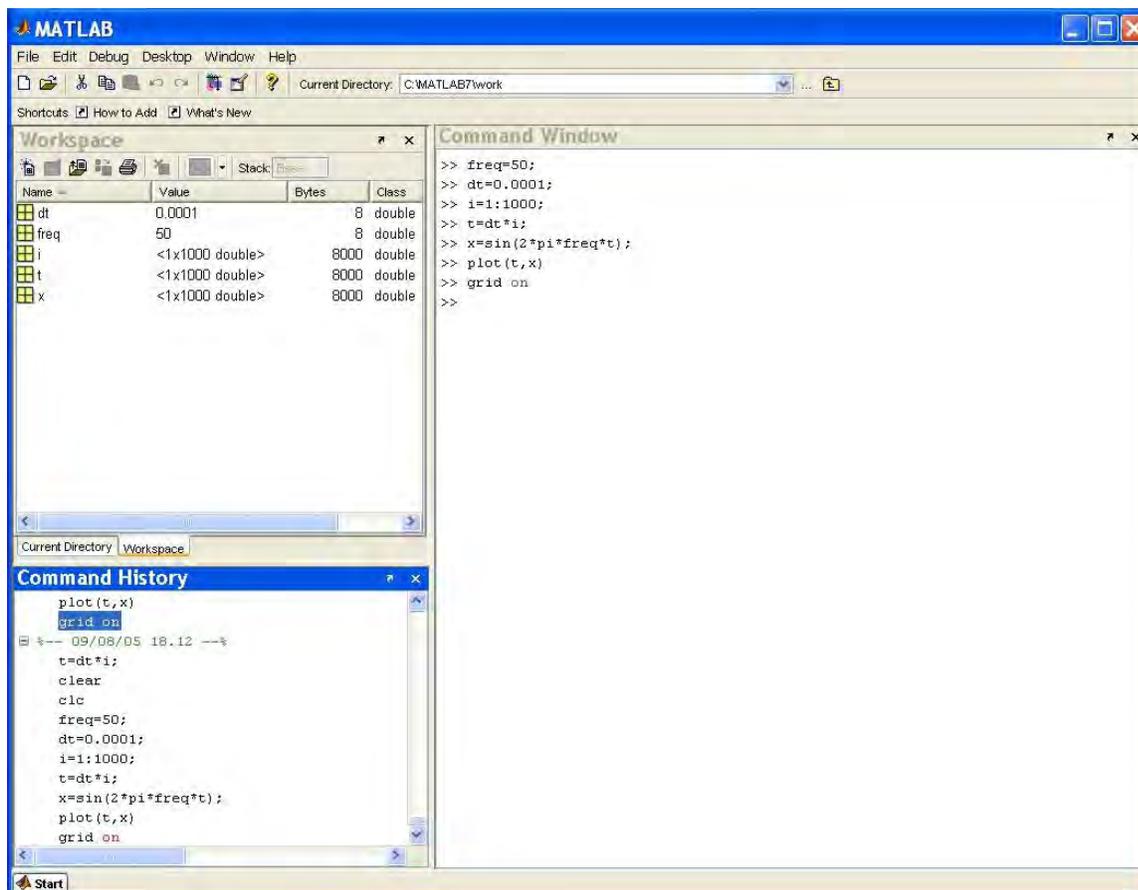
E quindi, quando si è pronti, si può far partire le misure, spingendo il pulsante start. Alla fine si può fermare rispungendo lo stesso pulsante che è diventato di stop.

I dati presi (di posizione, velocità e accelerazione) possono essere visti anche in forma tabellare (ed eventualmente modificati a mano). Possono essere salvati in formato testo, in modo da portarli in altri programmi (per esempio Excel o LabMec).

Programmazione in Matlab

Introduzione a Matlab

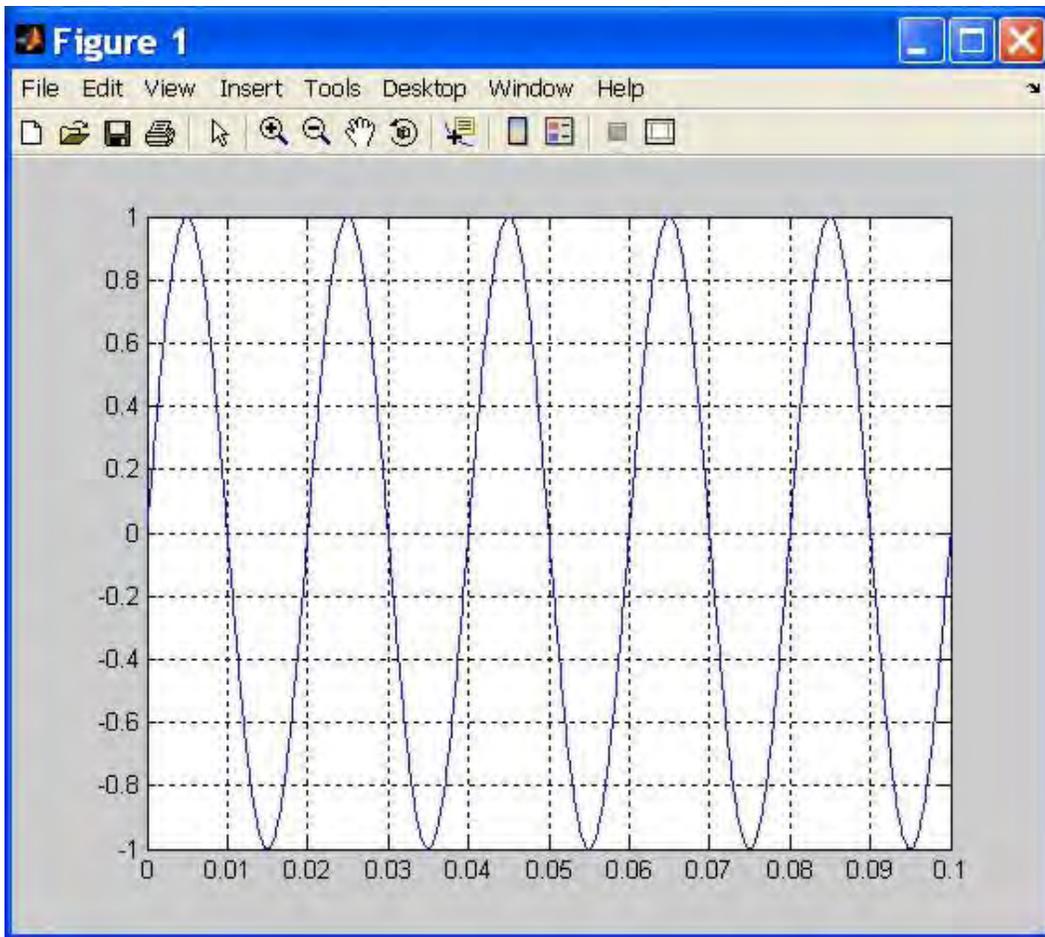
Matlab è un software che comprende un linguaggio di programmazione di alto livello per problemi tecnici e scientifici e un ambiente interattivo per l'analisi e lo sviluppo di programmi (vedi figura).



Per esempio, se nella finestra interattiva si digita (i “>>” sono il prompt)

```
>> freq=50;           assegna 50 alla variabile freq
>> dt=0.0001;        assegna 0.0001 alla variabile dt
>> i=1:1000;         crea un vettore i con i numeri da 1 a 1000
>> t=dt*i;           moltiplica i valori di i per dt
>> x=sin(2*pi*freq*t); crea un vettore x con i valori del seno
>> plot(t,x)         crea un grafico con t ascissa e x ordinata
>> grid on           aggiunge una griglia al grafico
>>
```

appare la seguente finestra:



Si noti che se un'istruzione non viene terminata da un “;” appare immediatamente il risultato:

```
>> a=2*8
a =
    16
>> i=1:0.5:2
i =
    1.0000    1.5000    2.0000
>>
```

I comandi possono essere messi in file (con estensione .m) che possono essere eseguiti semplicemente digitando il nome del file (senza l'estensione). Possono mettersi in file anche “functions” (analoghe, con qualche differenza, alle subroutine del Fortran e alle funzioni del C). Nell'ambiente interattivo è presente un esteso Help, con la descrizione delle migliaia di funzioni interne e tutorial.

Sono disponibili (con licenza a parte) numerosi toolbox per specifici ambiti applicativi (per esempio la statistica, l'analisi dei segnali, le equazioni differenziali alle derivate parziali, l'image processing e così via).

Matlab è prodotto dalla MathWorks (<http://www.mathworks.com/>) e nel sito sono disponibili ottimi manuali d'uso.

Esistono “cloni” gratuiti di Matlab. I due migliori sono

- **Scilab** (<http://scilabsoft.inria.fr/>) sviluppato a partire dal 1990 dall'INRIA, un istituto nazionale di ricerca francese
- **Octave** (<http://www.octave.org/>), originariamente sviluppato per Linux, ma attualmente gira anche sotto Windows e Mac OS X. Esiste anche una versione di Matlab che gira sotto Android.

Alcuni programmi in Matlab

Nel seguito riportiamo alcuni programmi in Matlab, che possono essere utilizzati per elaborare i dati o per costruire modelli. Li si possono trovare in

<http://grwavsf.roma1.infn.it/labmec/mlsoft/>.

Possono ovviamente anche essere usati come modelli per programmi in altri linguaggi.

Per leggere i dati del DataStudio

Questa è una function utile per leggere i file dati prodotti dal software DataStudio della Pasco.

```
function [t,s,dt,n]=leggi_pasco(file)

if ~exist('file','var')
    file=selffile(' ','File Pasco txt da aprire ?');
end

A=readascii_comma(file,2,2);

t=A(:,1);
s=A(:,2);
n=length(t);
dt=(t(n)-t(1))/(n-1);
```

Le variabili di uscita t,s,dt e n contengono rispettivamente le ascisse, le ordinate, il tempo di campionamento medio e il numero di coppie di dati. Se nella chiamata alla funzione non si mette il nome del file con l'eventuale indirizzo, viene richiesto interattivamente.

La funzione readascii_comma permette di leggere dati che usano come separatore decimale sia il punto che la virgola. Eccola:

```
function a=readascii_comma(file,ncomments,ncol)
%READASCII_comma reads an ASCII file to a vector, with comma-to-dot conversion
```

```

%
%     a=readascii(file,ncomments,ncol)
%
%
%   ncomments   is the number of lines containing comments (skipped and displayed)
%   ncol        is the number of the columns of the output array
%               (must be a sub-multiple of the total number of the data)

[fid,message]=fopen(file,'r');

if fid == -1
    disp(message);
end

for i = 1:ncomments
    line=fgetl(fid);
    disp(line);
end

c=fscanf(fid,'%c');
c=strrep(c,',',' ');
a=sscanf(c,'%g');
d=length(a);
nrig=ceil(d/ncol);

a=reshape(a,ncol,nrig);
a=a';

fclose(fid);

```

Fit lineare generale

Questa è una function Matlab per fare dei fit lineari, con dei polinomi, con delle funzioni sinusoidali o con qualsiasi insieme di funzioni.

Nel caso dei polinomi, va fornito il grado come parametro.

Nel caso della combinazione lineare di funzioni sinusoidali, vanno fornite come parametri le frequenze.

Nel caso generale il parametro è la matrice $n \times M$ dei valori delle M funzioni base per gli n punti di ascissa.

```

function [a,covar,res,chiq,ndof,err,errel]=gen_lin_fit(x,y,unc,ic,par,ipl)
% GEN_LIN_FIT general linear fit
%
%   [a,covar,res,chiq,ndof,err,errel]=gen_lin_fit(x,y,unc,ic,par,ipl)
%
%   x       abscissa value (length n) or gd
%   y       ordinate value (length n) or nothing
%   unc     y uncertainty (length n; if single number, all equal)
%   ic     type of linear fit:
%           0 -> general;    par the matrix [n,M]
%           1 -> polynomial; par the order
%           2 -> sinusoidal; par the frequencies
%   ipl    = 1 -> plot
%
%   a       fit parameters (length M)
%   covar   covariance matrix
%   res     residuals
%   chiq    chi-square value

```

```

% ndof degrees of freedom
% err mean square error
% errel mean square relative error

if isobject(x)
    y=y_gd(x);
    x=x_gd(x);
end

n=length(x);

if length(unc) == 1
    const=unc;
    unc(1:n)=const;
end

if ~exist('ipl','var')
    ipl=0;
end

x=x(:);y=y(:);unc=unc(:);

switch ic
    case 0
        A=par;
        [n,M]=size(F);
    case 1
        M=par+1;
        for i = 0:par
            A(:,i+1)=x.^(par-i);
        end
    case 2
        nfr=length(par);
        M=nfr*2;
        ii=0;
        for i = 1:nfr
            if par(i) > 0
                A(:,ii+1)=cos(2*pi*par(i)*x);
                A(:,ii+2)=sin(2*pi*par(i)*x);
                ii=ii+2;
            else
                A(:,ii+1)=cos(2*pi*par(i)*x);
                ii=ii+1;
                M=M-1;
            end
        end
end

F=A;
for i = 1:M
    A(:,i)=A(:,i)./unc;
end
y1=y./unc;

B=A'*A;
b=A'*y1;

covar=inv(B);
a=covar*b;

chiq=sum((y1-A*a).^2);
ndof=n-M;

y2=F*a;
err=sqrt(sum((y-y2).^2)/n);

```

```

errel=sqrt(sum((y-y2).^2)/n)/sqrt(sum(y.^2)/n);
res=y2-y;

if ipl > 0
    figure,plot(F),grid on,title('base functions')
    figure,plot(x,y,'. '),hold on,plot(x,y2,'r'),grid on,title('fit')
    figure,plot(x,res,'. '),grid on,title('residuals')
end

```

Le uscite `a`, `covar`, `res`, `chiq`, `ndof`, `err` e `errel` sono rispettivamente il vettore dei coefficienti, la matrice di covarianza, i residui del fit, il chi quadro del fit, il relativo numero di gradi di libertà, l'errore quadratico medio assoluto e quello relativo.

Selezione di segmenti di dati

Questa funzione serve a selezionare sotto periodi da un insieme di misure campionate.

```

function [xx ii]=sel_abc(typ,y,x,file)
%SEL_ABC interactive abscissa selection
%
% The input data can be two arrays (x,y) or a gd
% The output is a (n,2) array containing n couples of beginning-end abscissa
%
% typ    0 linear, 1 logx, 2 logy, 3 logx,y
% y      ordinate or gd or mp
% x      abscissa if y is ordinate, or 0
% file   if it exist, the output data are put on that file

if exist('x')
    if length(x) == 1
        x=x_gd(y);
        y=y_gd(y);
    end
else
    x=x_gd(y);
    y=y_gd(y);
end

n=0;
figure
switch typ
    case 0
        plot(x,y), hold on, grid on
    case 1
        semilogx(x,y), hold on, grid on
    case 2
        semilogy(x,y), hold on, grid on
    case 3
        loglog(x,y), hold on, grid on
end
cont=1;

while cont==1
    x2=ginput(2);
    n=n+1;
end

```

```

xx(n,1)=x2(1,1);
xx(n,2)=x2(2,1);
i1=indexofarr(x,xx(n,1));
i2=indexofarr(x,xx(n,2));
ii(n,1)=i1;
ii(n,2)=i2;
switch typ
case 0
    plot(x(i1:i2),y(i1:i2),'r')
case 1
    semilogx(x(i1:i2),y(i1:i2),'r')
case 2
    semilogy(x(i1:i2),y(i1:i2),'r')
case 3
    loglog(x(i1:i2),y(i1:i2),'r')
end
button=questdlg('Do you want to choose a period?');
cont=0;
if strcmp(button,'Yes')
    cont=1;
end
end

if exist('file')
    fid=fopen(file,'w');

    for i = 1:n
        fprintf(fid,'%f %f \r\n',xx(i,1),xx(i,2));
    end
    fclose(fid);
end

```

Fit polinomiale per sottoperiodi

Questa function facilita l'analisi per sotto-periodi di misure campionate.

L'output è costituito da una struttura dati che, per ogni sottoperiodo, contiene i dati, i coefficienti del polinomio interpolante, i residui, l'errore relativo e una flag che indica se sui dati di ascissa e/o di ordinata è stato fatto il log.

```

function data=data_polyfit(x,y,unc,iclog,deg,ii)
% DATA_POLYFIT analyzes x-y data
%
%     data=data_polyfit(x,y,iclog)
%
% x,y     input data
% unc     uncertainty on y data
% iclog   0,1,2,3 -> lin, x-log, y-log, xy-log
% deg     polynomial degree (if absent, interactive; < 0 -> deg=-deg, use external
ii)
%
% data(i).iclog   iclog
% data(i).x       the x of the selection
% data(i).y       the y
% data(i).a       the polynomial coefficients
% data(i).aunc    uncertainty on the polynomial coefficients
% data(i).res     the residuals
% data(i).errel   the relative error
% data(i).chiq    chi square

```

```

% data(i).ndof      number of degrees of freedom

x1=x;
y1=y;
if ~exist('iclog','var')
    iclog=0;
end
icdeg=1; % fixed deg, period choice
if ~exist('deg','var')
    icdeg=0; % deg and period choice
else
    if deg < 0
        icdeg=2; % fixed deg and period
        deg=-deg;
    end
end
switch iclog
    case 1
        x=log(x);
    case 2
        y=log(y);
    case 3
        x=log(x);
        y=log(y);
end

if icdeg < 2
    [xx ii]=sel_absc(0,y,x);
end

[i1 i2]=size(ii);

for i = 1:i1
    data(i).iclog=iclog;
    data(i).x=x1(ii(i,1):ii(i,2));
    data(i).y=y1(ii(i,1):ii(i,2));
    x2=x(ii(i,1):ii(i,2));
    y2=y(ii(i,1):ii(i,2));
    if icdeg == 0
        fig,figure,plot(x2,y2, '.'),grid on,
        ans=inputdlg('Polynomial degree ?');
        par=eval(ans{1});
        close(fig)
    else
        par=deg;
    end
    [a,covar,res,chiq,ndof,err,errel]=gen_lin_fit(x2,y2,unc,1,par,0);
    polyfit_res_plot(x2,y2,a,res)
    data(i).a=a;
    for j = 1:length(a)
        data(i).aunc(j)=sqrt(covar(j,j));
    end
    data(i).res=res;
    data(i).errel=errel;
    data(i).chiq=chiq;
    data(i).ndof=ndof;
end

```

Questa function, per mostrare il fit e iresidui, utilizza anche la

```

function polyfit_res_plot(x,y,a,res)
% POLYFIT_RES_PLOT in use with gen_lin_fit for polynomial fitting
%
% polyfit_res_plot(x,y,a,res)

```

```

%
% x,y    experimental data
% a      polynomial coefficients
% res    residuals

xmin=min(x);
xmax=max(x);
xx=xmin:(xmax-xmin)/1000:xmax;

figure
subplot(2,1,1),plot(x,y,'.'),grid on,hold on
plot(xx,polyval(a,xx),'r'),title('Data and fit')
subplot(2,1,2),plot(x,res,'.'),grid on,hold on,plot(x,res,'r'),title('Residuals')

```

Smoothing dei dati

Può talvolta essere utile “smussare” dei dati campionati. Per far ciò si può fare la media pesata dei dati intorno a un certo dato, facendo pesare di più quelli più vicini. La function qui riportata fa una media “mobile” sui dati in ingresso con una distribuzione dei pesi triangolare simmetrica. Si può decidere quale lunghezza prendere per la “larghezza” $2 \cdot d + 1$ del triangolo. La formula è la seguente

$$y_i = \frac{(d+1) \cdot x_i + \sum_{k=1}^d (d-k+1) \cdot (x_{i-k} + x_{i+k})}{(d+1)^2}$$

```

function y=easy_smooth(x,n)
% EASY_SMOOTH data smoothing
%
% x    input data
% n    smoothing depth (positive integer)
%
% y    smoothed data

if ~exist('n','var')
    n=1;
end

n=round(n);
if n < 1
    n=1;
end

win=1:n+1;
win(2*n+1:-1:n+2)=1:n;

y=conv(x,win)/(n+1)^2;
y=y(n+1:length(y)-n);

```

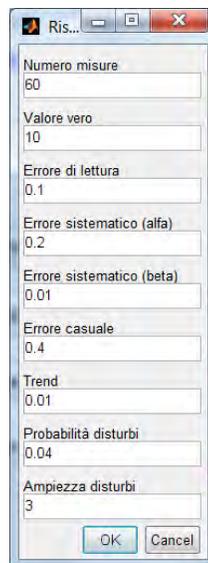
Programma “standalone” di simulazione e analisi LabMec

Si sono realizzati alcuni programmi di simulazione e analisi dati, scritti in Matlab, ma compilati “standalone”: possono cioè essere eseguiti senza che sia presente sul calcolatore il software Matlab (che comporta una licenza d’uso). Deve però essere installato il “runtime” Matlab. Questi programmi sono raccolti sotto un’unica interfaccia LabMec:



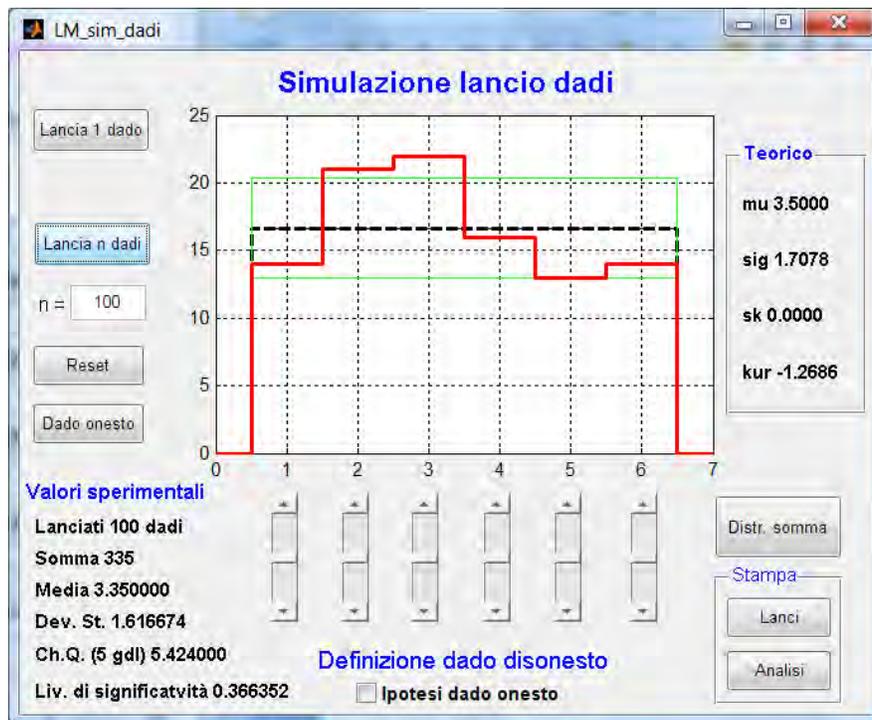
Da ciascun pulsante si attivano i vari programmi:

- **Misure con errori:**

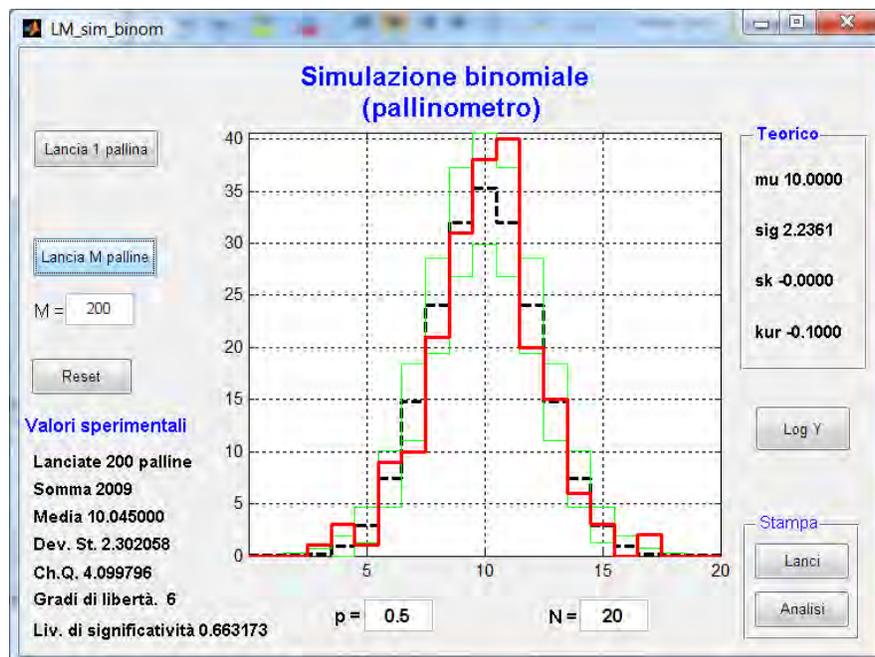


che produce misure simulate.

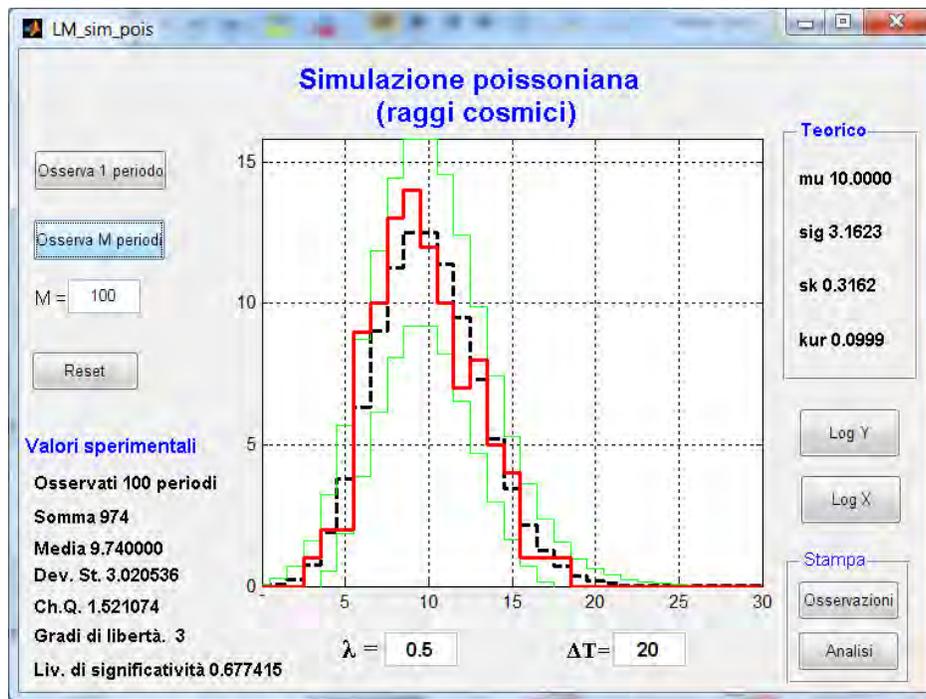
- Lancio dadi (“onesti” o no):



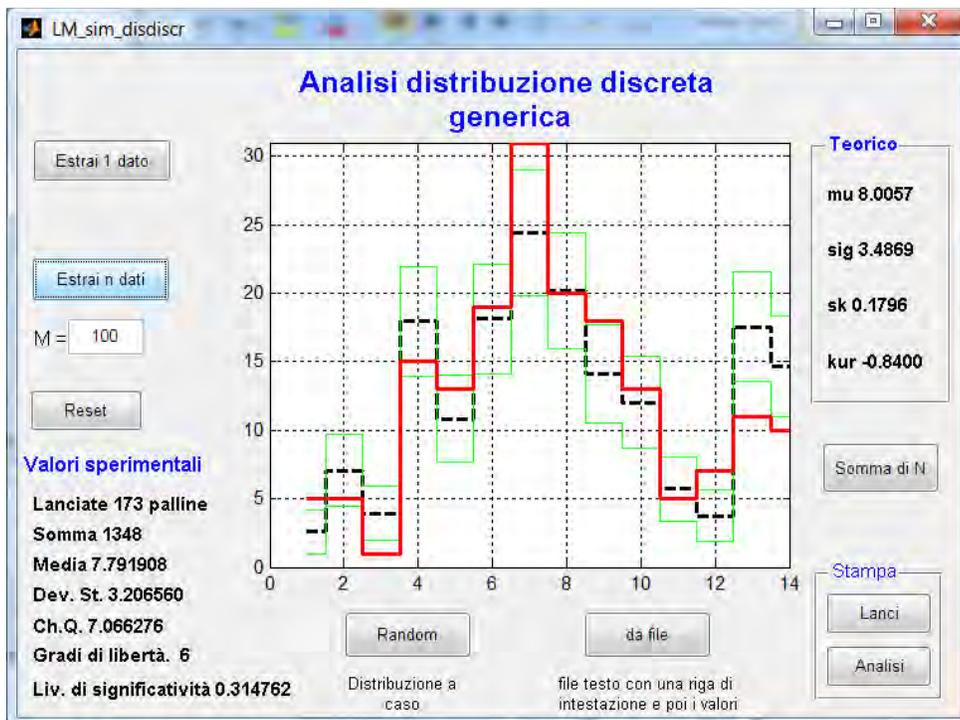
- Pallinometro:



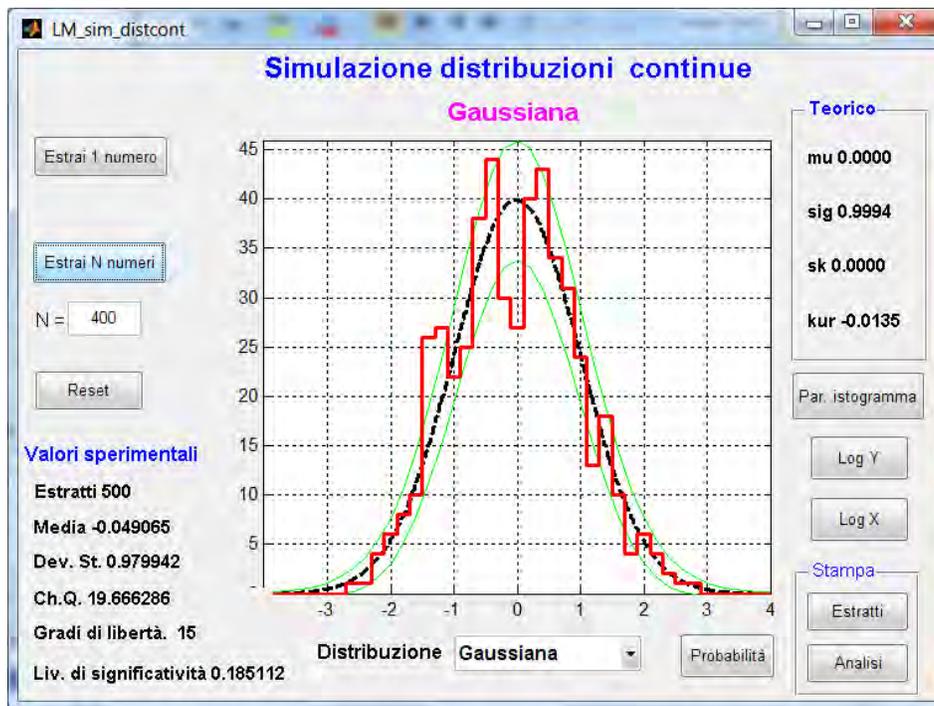
- Raggi Cosmici:



- Distribuzioni discrete:



- Distribuzioni continue:



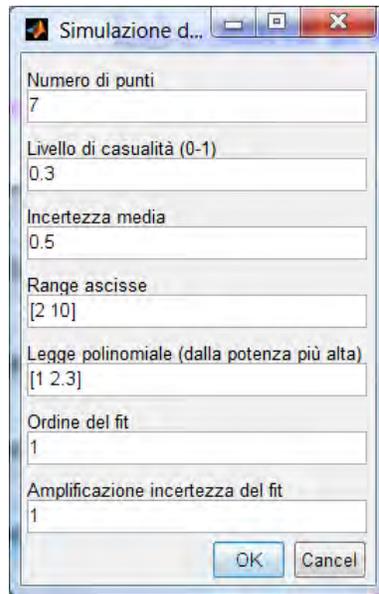
- Distribuzioni multivariate:

The screenshot shows a dialog box titled "Pa..." with the following fields and values:

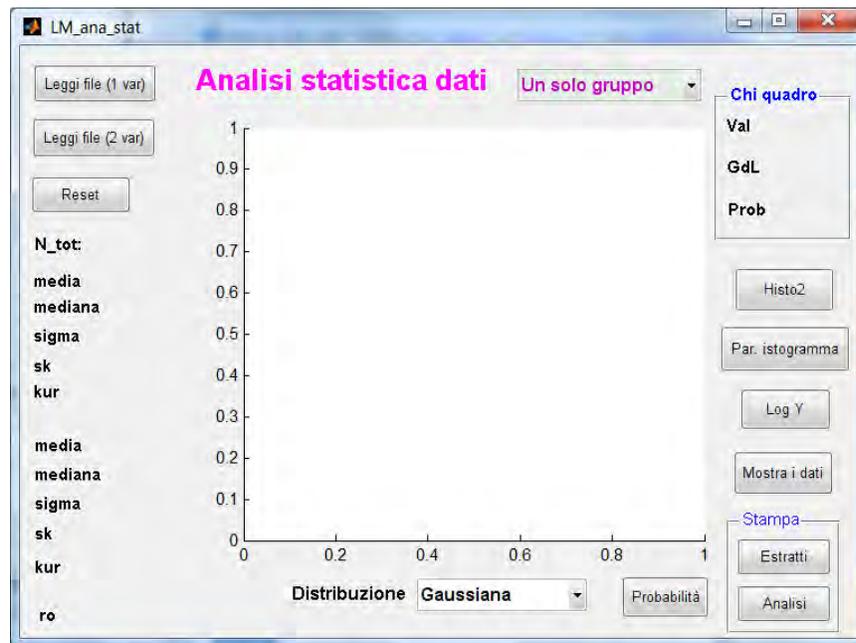
- Numero coppie di misure: 100
- Distribuzione: (empty)
- mu x: 0
- mu y: 0
- sigma x: 1
- sigma y: 1
- ro (coeff. di corr.): 0.3
- Istogramma: (empty)
- min x: -5
- max x: 5
- min x: -5
- max x: 5
- N x: 50
- N y: 50

Buttons for "OK" and "Cancel" are at the bottom.

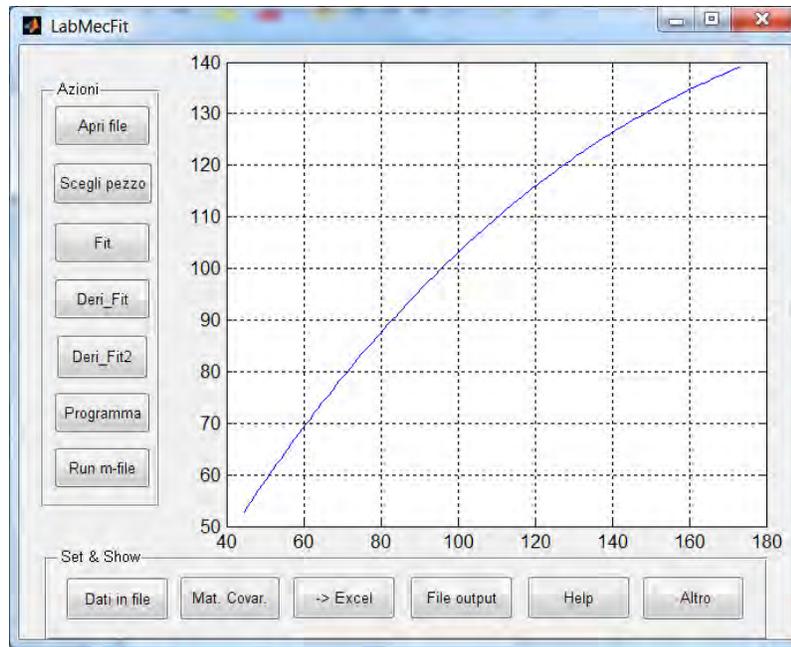
- **Grafici e Fit:**



- **Statistica**, analisi statistica di dati in file:



- **lab_plot**, plot di dati prodotti dal sistema di acquisizione Pasco.
- **an_pasco_polyfit**, fit polinomiale e residui di dati prodotti dal sistema di acquisizione Pasco.
- **LabMecFit**, programma generale per fit polinomiali:
Alla partenza compare una finestra come la seguente (senza grafici):



Le operazioni base sono le seguenti:

- **Apri file** , in cui si sceglie il file di dati (tipicamente .txt) che contiene i dati che vogliamo analizzare
- **Scegli pezzo** , in cui si sceglie il segmento di dati da analizzare; questa operazione può farsi in più passi, ogni volta restringendo il segmento
- **Fit** , calcola il fit polinomiale dei dati, i residui e la derivata prima e seconda dei dati; viene richiesto il grado del polinomio ed eventualmente il valore di cui si vuole ridurre l'ascissa (vedi approfondimenti). Viene aperta una finestra con due grafici: i dati selezionati (punti) col fit (in rosso) e i residui del fit. Viene anche calcolata la matrice di covarianza dei coefficienti del fit (e quindi le incertezze su di essi).

La derivata prima e seconda dei dati possono essere graficate spingendo i due bottoni relativi. Al lancio del programma si crea un file (filout_data_ora.txt) in cui va traccia di tutte le operazioni eseguite. Il nome del file può essere cambiato (nel nuovo file andranno tutte e sole le operazioni successive).

Ecco un esempio:

LabMecFit - 30-Jun-2009 09:15:22

Input file D:_SF\SF_Didat\LabMec\Dati_Pasco\Fuidi\massa1_3.txt min,max t: 0.900000, 220.800000; senserror = 0.100000

Selezione: min,max t: 8.600000, 208.300000

Fit polinomiale di grado 4 ; ascissa spostata di 0.000000, totale di 0.000000

Coefficienti fit ordine 4:

grado	valore	incertezza
4	-0.000000	0.000000
3	0.000001	0.000000

```
2 -0.001205 0.000057
1 0.696026 0.003223
0 -3.251974 0.055143
```

Statistica residui media/dev.st. : 0.000000 / 0.051929

Coefficienti derivata fit ordine 4:

```
grado valore
3 -0.000000
2 0.000003
1 -0.002411
0 0.696026
```

Coefficienti derivata seconda fit ordine 4: grado valore

```
3 -0.000000
2 0.000007
1 -0.002411
```

In questo file si possono mettere, spingendo i relativi bottoni della finestra principale, anche i dati selezionati e quelli da questi calcolati col fit e la matrice di covarianza. Tutti i dati calcolati possono andare, a richiesta, in un file Excel (ovviamente se Excel è presente sul calcolatore ospite).

C'è anche la possibilità di dare dei comandi Matlab da far eseguire. Ciò può farsi spingendo il pulsante "Programma" e dando i comandi nella finestra che appare. Le variabili che contengono i dati sono:

- t il tempo relativo alle misure selezionate
- s le misure selezionate
- fit il fit polinomiale fatto
- res i residui
- d1 la derivata prima del fit
- d2 la derivata seconda del fit
- p i coefficienti del polinomio di fit
- p1 i coefficienti del polinomio della derivata del fit
- p2 i coefficienti del polinomio della derivata seconda di fit

Per esempio il seguente programmino grafica il quadrato di d1 in funzione di s:

```
figure
plot(s,d1.^2)
grid on
```

È comodo mettere il programmino in un file testo e riportarlo nella finestra di programma con un copia e incolla.

- **Dati con incertezze**, per graficare dati con incertezze e fare fit polinomiali: possono graficarsi dati scritti in un file testo, con diversi formati. Quello consigliato è il formato "UC", così strutturato:

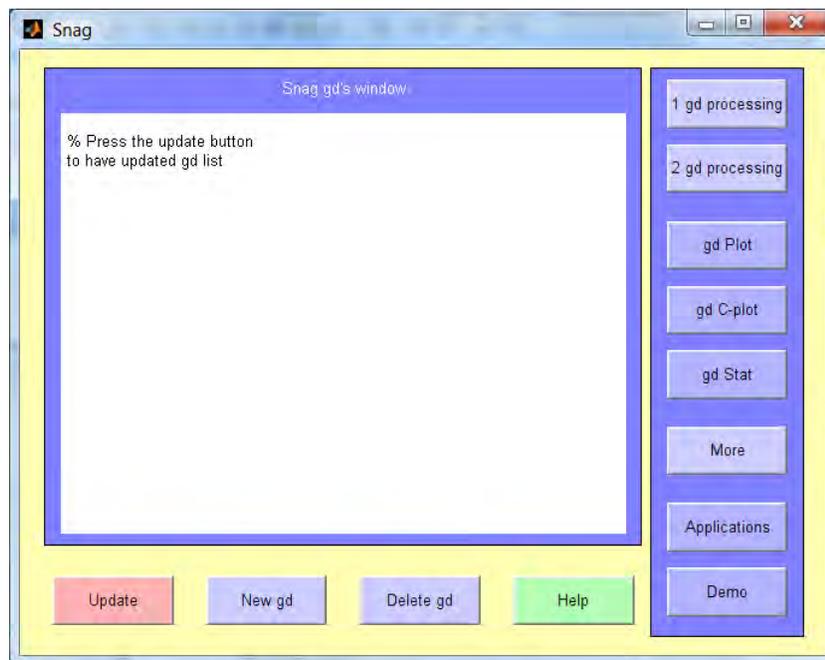
```
#UD
<stringa di didascalia>
<numero di dati>
<x1> <dx1> <y1> <dy1> <act1>
```

<x2> <dx2> <y2> <dy2> <act2>

.....

dove x_n , dx_n , y_n e dy_n sono ascissa, sua incertezza (assoluta), ordinata e sua incertezza, per ogni punto; act è una flag di attivazione che vale 1 o 0, a seconda se il dato presente deve essere considerato o no. Si può fare un fit dei dati plottati e vengono visualizzati anche i residui. Se avere punti fissi per il fit (per esempio obbligare il fit a passare per l'origine), introdurre i punti fissi come dati con piccolissima (rispetto alle altre) incertezza.

- **Snag**, toolbox per analisi dati generale:



Per ulteriori informazioni di installazione ed uso si fa riferimento agli specifici file di help.

Programmazione in Scilab

Scilab è un insieme di programmi gratuiti per il calcolo numerico sviluppati dallo INRIA e dallo ENPC in Francia, poi da Scilab Consortium in seno alla Fondazione Digiteo.

Il linguaggio di programmazione, di alto livello, ha una sintassi è simile a quella di MatLab e costituisce un buon sostituto di quest'ultimo.

Per una guida all'uso di Scilab, utile per il corso di Laboratorio (e non solo), si rimanda a <http://grwavsf.roma1.infn.it/labmec/slsoft/UsodiScilab.pdf>

Test ed esercizi

Test su dimensioni e istogrammi

1. Quali sono le dimensioni di una forza ? (Ricordare la seconda legge di Newton $F=ma$)

.....

2. Nella legge di gravitazione (in forma scalare)

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

quali sono le dimensioni della costante G ?

.....

3. Istogrammare separatamente le due serie di dati e calcolare la media e la deviazione standard da due sottoinsiemi di ciascuna serie:

88.810	95.551	92.669	95.915	95.639	94.271	97.081	95.201	95.501	90.672
87.918	97.852	94.148	90.122	94.449	93.381	91.282	96.506	96.445	93.385
83.838	91.391	94.811	90.874	93.233	97.506	89.214	91.677	91.737	88.698
93.936	88.159	98.476	96.239	87.743	89.803	94.733	92.161	93.221	89.443
92.396	93.316	96.757	95.212	93.632	93.870	90.925	91.118	94.827	92.836

6.069	6.020	5.908	6.035	6.248	6.924	6.656	6.047	5.506	5.766
6.083	6.417	6.818	5.724	5.736	6.342	6.084	6.731	6.526	5.879
5.761	6.823	6.907	5.656	6.985	5.539	6.552	6.401	6.234	5.553
6.385	6.594	5.619	6.580	5.630	5.566	6.839	5.744	5.943	6.350
5.882	6.739	5.695	5.596	6.517	6.079	6.851	5.870	6.662	6.168

Altri esercizi

1. Calcolare media e deviazione standard direttamente dagli istogrammi dell'esercizio precedente.

2. Direttamente dagli istogrammi precedenti, ricavare gli istogrammi con un bin 4 volte più grande.
3. Provare ad istogrammare le misure precedenti con un bin 4 volte più piccolo.
4. Verificare che la formula

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

dove s e s_0 sono lunghezze, v_0 è una velocità, a un'accelerazione e t il tempo, è dimensionalmente corretta.

5. Identificare gli eventuali errori dimensionali in

$$s = s_0^2 + v_0 \cdot \cos(s_0 \cdot t)$$

dove s e s_0 sono lunghezze, v_0 è una velocità e t il tempo.

6. Nella legge della forza elastica

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{l}$$

indicare le dimensioni della costante elastica k .

Test su incertezze e cifre significative

1. Scrivere in forma corretta i risultati delle seguenti misure:

a. $7.34067 \pm 0.0932 \text{ m}^2$

b. $32.123 \pm 1.2 \text{ m/s}$

c. $0.00003540 \pm 0.00000275 \text{ s}$

d. $7.34 \cdot 10^{22} \pm 6.56 \cdot 10^{21} \text{ kg}$

2. Il diametro di un cilindro di rame è $63.2 \pm 2.3 \text{ cm}$. Quale è la misura della circonferenza ?

.....

3. Calcolare le incertezze relative (percentuali) del diametro e della circonferenza del precedente esercizio.

diámetro

circonferenza

4. Due segmenti misurano rispettivamente $23.000345 \pm 0.000005 \text{ cm}$ e $7.2 \pm 0.4 \text{ cm}$.

Qual è la loro somma ?

.....

Altri esercizi

1. Abbiamo valutato il diametro di un cilindro con un'incertezza relativa di 0.00034. Abbiamo quindi moltiplicato questo valore per π , ottenendo dalla calcolatrice 384.7835193 cm. Esprimere la misura con la corretta espressione dell'incertezza.

Test sulla propagazione delle incertezze

(indicare sinteticamente i calcoli e dare il risultato finale)

1. Le misure dei lati di un parallelepipedo sono 4.3 ± 0.3 cm, 7.8 ± 0.4 cm e 5.7 ± 0.3 cm. Quale è la misura (con la relativa incertezza) del volume del parallelepipedo ?

.....

.....

.....

2. Calcolare la somma dei tre lati del parallelepipedo dell'esercizio precedente (con la relativa incertezza).

.....

.....

.....

3. Il diametro di un cilindro di rame è 63.2 ± 2.3 cm. Quale è la misura (con la relativa incertezza) dell'area di base ?

.....

.....

.....

Altri esercizi

1. Un quadrato ha un lato di 3.27 ± 0.12 m. Quale ne è l'area ?
2. Un rettangolo ha un lato di 3.27 ± 0.12 m e l'altro di 4.123 ± 0.023 m . Quale ne è l'area ? e il perimetro ?
3. Un cilindro ha il diametro di 2.543 ± 0.006 cm e l'altezza di 7.34 ± 0.05 cm . Quale è il volume e la superficie laterale ? Quale è l'incertezza relativa su queste due misure ?
4. Un'auto percorre 100.15 ± 0.21 m in 7.030 ± 0.010 s. Quale è la velocità ? Valutarne anche l'incertezza relativa.

Test elementare sulle probabilità

1. Supponiamo di avere un mazzo di 52 carte da poker ben mescolato. Calcolare la probabilità di avere, in una singola estrazione :
 - a. una figura (J, Q o K)
 - b. un 3 di qualsiasi colore o un 5 di cuori
 - c. una carta di quadri o di picche
 - d. una carta di denari

2. Supponiamo di avere un mazzo di 52 carte da poker ben mescolato. Calcolare la probabilità di avere, in due successive estrazioni (senza reinserimento) :
 - a. almeno una figura (J, Q o K)
 - b. una ed una sola figura
 - c. due figure
 - d. un tre e una figura
 - e. prima un 3 e poi una figura

3. Supponiamo che la probabilità di nascere in uno qualsiasi dei giorni dell'anno sia $1/365$. In una classe di 30 studenti, quale è la probabilità
 - a. che almeno 2 studenti abbiano lo stesso compleanno ?
.....
 - b. che almeno uno studente abbia il mio stesso compleanno ? (io non appartengo alla classe)

Altri esercizi

1. Supponiamo di giocare a poker⁷⁶ con un mazzo intero di 52 carte. Quale è la probabilità di avere "servito" (cioè con le cinque carte distribuite all'inizio)
 - a. una coppia "vestita" (cioè 2 J, Q, K o assi)
 - b. un full (cioè un tris e una coppia)
 - c. un poker (cioè 4 carte dello stesso valore, per es. 4 "Q" o 4 "5")
 - d. "colore" (cioè tutte le 5 carte dello stesso seme)
2. Valutare le probabilità precedenti nel caso si giochi con 5 dadi da poker (dadi sulle cui facce ci sono 9, 10, J, Q, K e A).
3. Lanciando 2 dadi, quale è la probabilità che la somma dei due numeri usciti superi 9 ?
4. Quale è la probabilità che lanciando 6 volte un dado non esca mai il 6 ?

⁷⁶ Per una descrizione delle regole del poker, vedi per esempio <http://it.wikipedia.org/wiki/Poker>

Esercizi sulle variabili casuali discrete

1. Un venditore di pomodori suddivide il suo prodotto in tre categorie: A di prima scelta, B di seconda scelta, C di scarto (per usi non commestibili). In una annata produce 500 tonnellate di pomodori. Se, in genere, la probabilità che un pomodoro sia di categoria A è 0.2, che sia di categoria B è 0.7 e che sia di categoria C è 0.1, e se vende quelli di categoria A a 2 € al chilogrammo, i B a 1 € e i C a 10 centesimi, quale è il valore atteso del ricavo del produttore ?
2. Se un anno un parassita attacca le coltivazioni, colpendo ciascun frutto con probabilità 0.2 e "riducendolo" a categoria C, quale è il ricavo del produttore ?
3. Un dado "disonesto" ha probabilità delle varie facce pari a :
 - 1 → 0.10
 - 2 → 0.15
 - 3 → 0.15
 - 4 → 0.15
 - 5 → 0.15
 - 6 → 0.30

Quale è il valore medio e la deviazione standard ?

Test sulla binomiale

1. Quale è la probabilità che lanciando 10 volte un dado
 - a. si abbia 4 volte il 6 ?
 - b. si abbia 8 volte un numero dispari ?

2. Si lanci 100 volte un dado.
 - a. Si consideri la distribuzione del numero di volte che esce il 6: quale è il valor medio e la deviazione standard di questa distribuzione ?
 - b. Si consideri la distribuzione del numero di volte che esce un numero dispari: quale è il valor medio e la deviazione standard di questa distribuzione ?

Altri esercizi

1. Quale è la probabilità che lanciando 6 volte un dado esca 2 volte il 6 ?
2. Lanciando 5 dadi da poker, quale è la probabilità di fare "poker" (4 valori uguali su 5) ?
3. Ogni giorno Pierino va al bar di un amico e compra un cioccolatino il cui acquisto è abbinato a una lotteria: se si vince, si ha un altro cioccolatino. La probabilità di vincere è 0.01 . In una settimana Pierino vince 3 volte. Qual è la probabilità di un tale evento ? Si può pensare che il suo amico barista "bari" ?
4. Anna percorre la strada da casa all'università (10 km) ad una velocità media di 30 km/ora più il tempo perso per i semafori (per ogni semaforo rosso perde un minuto e sul percorso ci sono 10 semafori che sono "rossi" ciascuno con probabilità 0.5). Quale è la probabilità che Anna ci impieghi al più 23 minuti ? e che ci impieghi meno di mezz'ora ?

Test sulla Poissoniana

Eventi poissoniani

Un rivelatore di particelle rivela 193 eventi in 200 secondi. Sono riportati i tempi di rivelazione in secondi, dall'inizio dell'esperimento. Dividere l'intervallo in sottoperiodi di 5 secondi e verificare che il numero di eventi k_i in ciascun sottoperiodo è distribuito secondo Poisson, con

$\mu = \frac{193}{200} \cdot 5 = 4.825$, riportando l'istogramma dei k_i con la distribuzione attesa, normalizzata a 40.

0.1222965	35.4625	79.41083	112.8855	159.1051
0.3669938	36.21914	79.83187	113.5297	160.1854
0.6309596	38.39381	80.01302	113.9164	160.596
0.6934335	40.07841	80.59615	118.241	161.606
0.7099024	40.32265	82.58794	119.1172	162.1757
1.043561	43.22042	83.02778	119.6759	162.2668
1.774322	44.76171	83.42693	119.8972	163.1754
2.157382	44.85162	85.06684	120.3801	164.5291
6.191589	46.55873	86.47062	120.4968	164.9986
6.406148	47.37276	86.66746	124.1225	166.9052
8.519325	49.42463	89.97493	126.864	168.3661
9.028439	50.20158	91.00443	128.901	168.5007
10.92862	51.38106	91.13055	131.6242	170.1678
11.72015	51.5987	91.94082	131.7353	174.3638
11.95351	51.60309	92.32994	131.8687	174.6659
12.17121	51.78259	92.65	132.1218	177.4181
12.63266	53.34565	93.0381	133.9777	177.4732
13.33597	54.27451	94.13755	135.7047	177.811
13.71437	55.00815	95.7785	137.1207	178.976
15.38591	55.03559	95.9754	137.7384	180.8931
15.96279	55.85402	96.42563	139.2383	181.8684
17.28769	56.50719	96.72414	140.5537	185.0294
17.98264	57.09561	97.35611	141.0963	185.8767
19.96184	57.98175	97.76374	141.0996	186.3757
20.85445	58.44807	98.77635	141.4931	187.8615
22.62116	65.0033	99.9992	145.0751	190.4416
23.57228	67.73297	100.0561	145.4846	190.9077
24.46623	67.87069	101.5039	146.3622	191.2192
24.56964	67.87149	106.8299	147.2498	191.2637
24.90216	69.99692	107.1806	148.2781	192.4775
26.82421	72.00056	107.5775	149.4957	192.8022
29.45192	72.56319	108.9048	152.1929	194.3186
29.86012	72.81668	110.504	152.8506	196.1855
32.21873	72.93658	110.8806	153.0618	197.7562
32.59529	73.2037	110.9425	153.5758	198.2301
33.99259	75.74654	110.9712	154.4919	198.681
34.7613	75.84129	111.8014	155.4946	199.896
34.76142	77.75893	111.9891	157.4799	
35.41279	78.37442	112.3111	157.8955	

Altri esempi

1. Un contatore Geiger misura, in una certa situazione sperimentale, 4.8 particelle al secondo. In un'ora quanti "secondi" senza particelle ci aspettiamo ?
2. Quanti secondi con 8 particelle ci aspettiamo ?
3. Quale è approssimativamente la mediana di questa distribuzione ? e la moda ?

Test sulla distribuzione normale

1. Dalle seguenti 10 misure di una grandezza fisica **G** in unità non definite

-0.66 2.12 0.79 2.94 1.52 0.54 1.38 2.68 2.57 1.74

ricavare una stima di **G** con la relativa incertezza. Ponendo un livello di fiducia del 95 %, è tale misura consistente col valore teorico 2.70 ?

Stima di G con incertezza	
La teoria è verificata ?	

2. Lanciando una moneta “onesta”, quale è la probabilità di avere almeno 60 volte testa su 100 lanci ?

Scarto	
Rapporto critico (CR)	
Probabilità	

3. Siano date le seguenti misure in metri di una lunghezza **L**, eseguite ripetutamente nelle stesse condizioni con uno strumento di grande accuratezza (assenza di errori sistematici) e con errori casuali abbastanza gaussiani:

17.03
15.92
18.16
19.29
15.86
17.65
17.56
18.41
13.55
16.81

- a) Con che incertezza conosciamo **L** ? Scrivere la misura con l'incertezza in modo corretto.
- b) La teoria ci dice che **L** dovrebbe valere 18.6 m. Ponendo un livello di fiducia del 95%, possiamo dire che la teoria è confermata ?

Altri esercizi

1. Si lanci 2000 volte una moneta "onesta". Quale è (in approssimazione) la probabilità di avere almeno 1050 volte testa ? E di averne almeno 950 ?
2. Si lanci 2000 volte una moneta "onesta". Quale è l'intervallo, simmetrico rispetto al valore al valor medio 1000, a cui è associata una probabilità il più vicino possibile a 0.5 ?
3. Si lancino 1000 volte una moneta e un dado. È più probabile che esca 200 volte il 6 o 550 volte testa ?
4. La misura della lunghezza di un tavolo ha un'incertezza, dovuta ad errori casuali, di 0.8 cm. Se ripetiamo la misura 100 volte e ne facciamo la media, quale è la larghezza dell'intervallo di misura relativo a un livello di fiducia di 0.9 ?
5. Osserviamo dei campioni estratti da una distribuzione gaussiana. Ne troviamo che una frazione pari a 0.1 (il 10 %) è inferiore a 4 e una frazione pari a 0.2 (il 20 %) è superiore a 5. Quale è la media e la deviazione standard ?

Esercizi vari

1. Graficare le seguenti misure su un foglio di carta millimetrata, stimare i parametri m e q della retta $y = m * x + q$, e valutarne l'incertezza, sia "a mano" che col fit.

x	y
3.0 ± 0.1	3.3 ± 0.3
5.0 ± 0.1	4.6 ± 0.3
7.5 ± 0.1	5.2 ± 0.3
10.0 ± 0.1	6.7 ± 0.3
14.5 ± 0.1	8.2 ± 0.3

2. Jacob e Johann, due onesti fratelli, giocano scommettendo sul lancio di una moneta: ad ogni lancio si giocano un euro. Quale è la probabilità che dopo 100 lanci Jacob abbia vinto almeno 10 euro ?
3. Calcolare il coefficiente di correlazione tra le seguenti due serie x_i e y_i .

x_i :

5.6 3.5 9.6 10.0 7.0 11.4 4.0 6.0 11.0 8.2

y_i :

7.2 7.0 6.1 4.8 5.5 4.7 7.8 6.3 5.6 5.8

Cosa possiamo dire sulle due serie ?

4. Siano date le seguenti 4 misure sperimentali della grandezza y , per 4 diversi valori di x , con le relative incertezze Δy .

y	7.49	8.73	7.31	8.19
Δy	0.39	0.94	0.37	1.26
t	7.62	8.01	8.40	8.79

Fare il test del χ^2 delle misure con i valori teorici t . Con un livello di fiducia del 95%, la teoria é accettata ?

5. Galileo Galilei vuole dimostrare che un grave lasciato cadere dalla Torre di Pisa si muove di moto accelerato uniforme, con accelerazione pari a 9.8 m/s^2 . Per far ciò fa 7 misure, una per ciascun livello della Torre e quindi fa il χ^2 , pone un livello di fiducia del 95% e trova 10.

- a) La sua teoria è confermata ?
 - b) Ripensandoci, scopre che ha sovrastimato le incertezze di misura di un fattore 2. Quale è il nuovo χ^2 ?
 - c) Cambia la sua opinione sulla teoria ?
6. Di una variabile gaussiana x ignoriamo il valore aspettato e la deviazione standard μ e σ ; sappiamo tuttavia che:
- a. la probabilità di avere $x > 4$ è 0.8413
 - b. la probabilità di avere $x > 10$ è 0.0228

Trovare i valori di μ e σ .

Dati distribuiti secondo Cauchy

Provare a fare la media di 20, 50, 100, 200, 500 di questi numeri (comunque presi, eventualmente copiandoli in Excel con “taglia e incolla”). A cosa tende la media ?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	-21.74	0.83	0.35	12.82	-16.99	0.56	-2.30	2.72	1.40	-185.10
10	-8.71	-4.97	0.16	-0.69	2.58	-0.46	-2.63	13.39	-1.25	-0.66
20	-5.26	-2.34	4.26	0.52	-3.12	-1.14	-0.42	1.48	-2.21	0.65
30	-0.31	0.59	0.96	-3.53	2.20	0.59	0.29	-3.08	4.98	-1.04
40	-0.57	-2.33	0.62	0.32	-0.03	7.34	0.84	0.04	-0.04	-2.42
50	2.42	-1.02	1.89	-0.24	1.14	-0.53	13.27	0.06	-2.76	-0.51
60	-4.30	-10.32	6.45	0.19	0.58	3.33	-0.37	6.54	1.57	4.19
70	0.47	0.33	-0.04	-3.43	-0.19	1.50	-0.81	0.01	2.56	1.02
80	-0.98	2.03	0.73	1.25	0.37	-0.42	0.82	-1.52	-0.25	7.39
90	-0.81	0.47	-0.82	-27.93	0.34	0.89	0.48	0.28	-1.85	0.62
100	0.61	-1.20	0.44	0.91	2.35	-15.34	0.15	-5.31	1.49	-0.34
110	0.43	1.30	-3.17	-1.91	-4.70	-0.21	1.00	5.21	7.07	4.78
120	-0.90	1.38	1.32	-2.08	-0.99	-0.26	11.15	1.01	-1.22	-0.26
130	-0.90	-1.18	0.68	-0.05	-2.42	-0.12	1.05	0.15	0.82	-1.60
140	0.41	1.19	-1.14	-0.04	0.69	-0.06	1.89	-2.15	1.06	-1.52
150	1.07	2.75	-0.44	0.93	-0.29	-0.16	0.09	-2.01	0.36	-0.29
160	-0.92	1351.08	-0.55	0.45	1.16	1.96	0.20	0.36	-0.12	0.27
170	0.29	0.37	-1.57	1.14	-1.65	-0.41	-0.21	-5.76	0.89	1.41
180	2.75	1.63	-2.10	1.45	-1.88	-0.90	2.63	-5.59	0.78	-0.86
190	3.07	-2.01	-3.68	-2.23	0.29	-25.74	0.32	-0.13	-0.66	-0.66
200	-6.52	1.29	-0.30	7.15	-0.75	4.90	0.98	0.19	0.27	-2.05
210	0.21	-0.08	-0.21	-0.57	0.03	-2.60	3.67	-1.32	-6.99	1.07
220	-0.98	-2.98	-0.74	-1.99	0.11	1.36	-1.33	-1.17	-0.08	-1.08
230	0.43	2.39	-0.09	0.28	-1.07	-0.27	-0.36	1.43	-0.74	-8.23
240	-0.51	0.63	-28.60	6.41	-14.29	1.35	1.95	4.94	0.32	1.29
250	1.45	-0.42	20.26	-4.13	0.66	-1.63	-0.64	1.56	0.81	2.55
260	0.15	5.43	-0.92	0.14	1.32	2.68	-0.12	-0.05	-0.66	0.80
270	-0.90	15.05	0.35	-0.97	6.79	2.51	-2.56	-1.20	-0.12	-0.46
280	-0.07	-0.37	0.02	0.30	0.69	0.67	0.36	4.20	1.33	-0.50
290	6.63	3.26	-0.03	0.27	1.14	-0.42	-4.45	1.04	115.90	-2.08
300	0.63	0.42	-0.08	-1.09	-0.67	-0.25	2.22	-0.36	-0.38	111.43
310	0.20	-0.35	-13.15	-0.45	4.38	0.47	-0.16	0.63	1.17	-0.25
320	1.53	0.76	-0.04	-1.68	-8.78	0.47	0.02	-0.43	5.57	0.10
330	-22.55	0.87	1.78	-0.11	1.36	-3.64	-0.46	-2.07	0.57	-6.27
340	-1.08	4.58	-1.94	-0.42	0.12	-1.03	-0.26	-0.63	0.15	-2.28
350	2.24	0.72	1.50	-0.11	-2.34	6.32	1.29	-46.87	-0.20	-1.16

360	-5.36	0.84	0.86	-0.57	1.06	0.44	-1.05	0.51	1.66	0.65
370	-1.18	-2.31	-2.26	0.48	0.17	-2.59	2.87	-14.14	-7.46	-3.61
380	1.95	0.00	4.72	0.81	-0.08	-0.77	-129.04	0.01	0.76	-1.74
390	1.86	0.78	-0.65	18.22	1.66	-2.86	1.37	0.03	1.56	-0.26
400	-0.50	-0.34	-0.84	-0.12	-0.81	-0.44	1.10	-3.23	35.43	1.78
410	6.02	-0.79	-0.72	-0.87	-0.38	-0.52	-0.30	0.96	0.02	0.52
420	1.73	0.90	1.71	-0.30	-0.59	1.66	1.99	0.60	-0.47	-1.50
430	-0.50	1.36	-10.08	-1.33	-2.15	0.20	-1.39	0.55	-0.57	-2.38
440	2.66	-0.94	95.81	-5.90	-0.58	-2.80	2.52	3.36	0.52	730.04
450	-0.97	-2.37	-1.98	0.44	-4.63	0.17	-0.46	-4.32	-0.62	0.83
460	-1.71	-2.95	1.07	2.21	6.46	0.67	-0.77	-1.02	5.24	-0.86
470	-0.10	0.00	-3.43	0.02	-0.33	0.76	0.27	-1.37	-0.55	1.17
480	-0.11	1.20	-0.51	0.47	-16.94	-1.01	-8.65	-1.73	-0.97	-0.16
490	-0.87	6.49	0.83	-5.21	0.54	-0.37	-1.70	-0.03	0.53	0.42
500	0.08	0.63	0.22	2.46	0.11	-0.08	1.19	0.03	0.37	1.57

Appendice - Approfondimenti e cenni ad altri argomenti

Sono qui presentati alcuni argomenti fuori programma, riportati per completezza, riferimento o per curiosità.

Unità di misura americane e britanniche

Da <http://ts.nist.gov/ts/htdocs/230/235/h4402/appenc.pdf>, sito del NIST.

TABLES OF U.S. UNITS OF MEASUREMENT

<http://ts.nist.gov/ts/htdocs/230/235/appxc/appxc.htm> - [footnote2#footnote2](#)

In these tables where foot or mile is underlined, it is survey foot or U.S. statute mile rather than international foot or mile that is meant.

Units of Length

12 inches (in)	= 1 foot (ft)
3 <u>feet</u>	= 1 yard (yd)
16-1/2 feet	= 1 rod (rd), pole, or perch
40 rods	= 1 furlong (fur) = 660 <u>feet</u>
8 furlongs	= 1 U.S. statute mile (mi) = 5280 <u>feet</u>
1852 meters	= 6076.115 49 feet (approximately)
	= 1 international nautical mile

Units of Area <http://ts.nist.gov/ts/htdocs/230/235/appxc/appxc.htm> - [footnote3#footnote3](#)

144 square inches (in ²)	= 1 square foot (ft ²)
9 square feet	= 1 square yard (yd ²)
	= 1296 square inches
272-1/4 square <u>feet</u>	= 1 square rod (sq rd)
160 square rods	= 1 acre = 43 560 square feet
640 acre	= 1 square <u>mile</u> (mi ²)
1 <u>mile</u> square	= 1 section of land
6 <u>miles</u> square	= 1 township
	= 36 sections = 36 square <u>miles</u>

Units of Volume <http://ts.nist.gov/ts/htdocs/230/235/appxc/appxc.htm> - [footnote3#footnote3](#)

1728 cubic inches (in ³)	= 1 cubic foot (ft ³)
27 cubic feet	= 1 cubic yard (yd ³)

Gunter's or Surveyors Chain Units of Measurement

0.66 <u>foot</u> (ft)	= 1 link (li)
100 links	= 1 chain (ch)
	= 4 rods = 66 <u>feet</u>
80 chains	= 1 U.S. statute mile (mi)
	= 320 rods = 5280 <u>feet</u>

Units of Liquid

Volume [http://ts.nist.gov/ts/htdocs/230/235/appxc/appxc.htm - footnote4#footnote4](http://ts.nist.gov/ts/htdocs/230/235/appxc/appxc.htm-footnote4#footnote4)

4 gills (gi)	= 1 pint (pt) = 28.875 cubic inches
2 pints	= 1 quart (qt) = 57.75 cubic inches
4 quarts	= 1 gallon (gal) = 231 cubic inches
	= 8 pints = 32 gills

Apothecaries Units of Liquid Volume

60 minims (min or \square)	= 1 fluid dram (fl dr or $\mathcal{f}\square$)
	= 0.225 6 cubic inch
8 fluid drams	= 1 fluid ounce (fl oz or $\mathcal{f}\square$)
	= 1.804 7 cubic inches
16 fluid ounces	= 1 pint (pt or \square)
	= 28.875 cubic inches
	= 128 fluid drams
2 pints	= 1 quart (qt) = 57.75 cubic inches
	= 32 fluid ounces = 256 fluid drams
4 quarts	= 1 gallon (gal) = 231 cubic inches
	= 128 fluid ounces = 1024 fluid drams

Units of Dry Volume [http://ts.nist.gov/ts/htdocs/230/235/appxc/appxc.htm - footnote5#footnote5](http://ts.nist.gov/ts/htdocs/230/235/appxc/appxc.htm-footnote5#footnote5)

2 pints (pt)	= 1 quart (qt) = 67.200 6 cubic inches
8 quarts	= 1 peck (pk) = 537.605 cubic inches
	= 16 pints
4 pecks	= 1 bushel (bu) = 2150.42 cubic inches
	= 32 quarts

Avoirdupois Units of

Mass <http://ts.nist.gov/ts/htdocs/230/235/appxc/appxc.htm> -

[footnote6#footnote6](#)

[The "grain" is the same in avoirdupois, troy, and apothecaries units of mass.]

27-11/32 grains	= 1 dram (dr)
16 drams	= 1 ounce (oz)
	= 437-1/2 grains
16 ounces	= 1 pound (lb)
	= 256 drams
	= 7000 grains
	= 1 hundredweight
100 pounds	(cwt) http://ts.nist.gov/ts/htdocs/230/235/appxc/appxc.htm
	- footnote7#footnote7
20	= 1 ton
hundredweights	= 2000 pounds ⁷

In "gross" or "long" measure, the following values are recognized:

112 pounds	= 1 gross or long hundredweight ⁷
20 gross or long hundredweights	= 1 gross or long ton
	= 2240 pounds ⁷

Troy Units of Mass

[The "grain" is the same in avoirdupois, troy, and apothecaries units of mass.]

24 grains	= 1 pennyweight (dwt)
20 pennyweights	= 1 ounce troy (oz t) = 480 grains
12 ounces troy	= 1 pound troy (lb t)
	= 240 pennyweights = 5760 grains

Apothecaries Units of Mass

[The "grain" is the same in avoirdupois, troy, and apothecaries units of mass.]

20 grains	= 1 scruple (s ap or )
3 scruples	= 1 dram apothecaries (dr ap or )
	= 60 grains
8 drams apothecaries	= 1 ounce apothecaries (oz ap or )
	= 24 scruples = 480 grains
12 ounces apothecaries	= 1 pound apothecaries (lb ap)
	= 96 drams apothecaries
	= 288 scruples = 5760 grains

NOTES ON BRITISH UNITS OF MEASUREMENT

In Great Britain, the yard, the avoirdupois pound, the troy pound, and the apothecaries pound are identical with the units of the same names used in the United States. The tables of British linear measure, troy mass, and apothecaries mass are the same as the corresponding United States tables, except for the British spelling "drachm" in the table of apothecaries mass. The table of British avoirdupois mass is the same as the United States table up to 1 pound; above that point the table reads:

14 pounds	= 1 stone
2 stones	= 1 quarter = 28 pounds
4 quarters	= 1 hundredweight = 112 pounds
20 hundredweight	= 1 ton = 2240 pounds

The present British gallon and bushel--known as the "Imperial gallon" and "Imperial bushel" are, respectively, about 20 percent and 3 percent larger than the United States gallon and bushel. The Imperial gallon is defined as the volume of 10 avoirdupois pounds of water under specified conditions, and the Imperial bushel is defined as 8 Imperial gallons. Also, the subdivision of the Imperial gallon as presented in the table of British apothecaries fluid measure differs in two important respects from the corresponding United States subdivision, in that the Imperial gallon is divided into 160 fluid ounces (whereas the United States gallon is divided into 128 fluid ounces), and a "fluid scruple" is included. The full table of British measures of capacity (which are used alike for liquid and for dry commodities) is as follows

4 gills	= 1 pint
2 pints	= 1 quart
4 quart	= 1 gallon
2 gallons	= 1 peck
8 gallons (4 pecks)	= 1 bushel
8 bushels	= 1 quarter

The full table of British apothecaries measure is as follows

20 minims	= 1 fluid scruple
3 fluid scruples	= 1 fluid drachm
	= 60 minims
8 fluid drachm	= 1 fluid ounce
20 fluid ounces	= 1 pint
8 pints	= 1 gallon (160 fluid ounces)

La scala logaritmica

Talora occorre rappresentare sull'asse di un grafico una grandezza, sempre positiva, i cui valori minimo e massimo m ed M siano tali che $\frac{M}{m}$ sia molto elevato (per esempio maggiore di 100).

L'uso della normale scala lineare può essere scomodo, perché rende non apprezzabili le variazioni intorno ai valori piccoli (ciò è evidente nel caso in cui gli effetti che si vogliono evidenziare sono proporzionali al valore della grandezza).

In questo caso si può usare con profitto la scala logaritmica. Ciò si può fare o rappresentando su scala lineare il logaritmo della grandezza in questione o usando carte con scale logaritmiche (vedi capitolo 6).

Un caso particolare è quando la grandezza da rappresentare è la variabile indipendente, cioè i cui valori li scegliamo noi. In tal caso sceglieremo valori che costituiscono una progressione geometrica, cioè, scelto un numero a chiamato "ragione", i valori che sceglieremo saranno

$$(1.1) \quad \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \cdot a \\ x_3 \cdot a^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \cdot a^{k-1} \end{array}$$

Si noti che il rapporto tra un valore e il precedente è sempre a .

In pratica è però più comodo apportare una piccola variazione a questa scelta: innanzitutto si sceglie il numero di punti per "decade" di variazione della grandezza, e questo spesso è 1 o 2 o 3, quindi si definiscono i valori "comodi" per ogni decade.

In genere si sceglie:

- un punto per decade (ragione 10): 1, 10, 100, 1000,...
- due punti per decade (ragione circa 3): 1, 3, 10, 30, 100, 300, 1000,...
- tre punti per decade (ragione circa 2): 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000,...

Come si vede, la ragione non è esattamente la stessa, ma il valore dei punti è molto comodo.

Il teorema di Bayes

Supponiamo di avere un evento \mathbf{A} che può essere causato da uno ed uno solo di \mathbf{N} eventi $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_N$, mutuamente esclusivi. Supponiamo di conoscere le \mathbf{N} probabilità condizionate $\mathbf{P}(\mathbf{A} | \mathbf{B}_i)$ che capitano \mathbf{A} se è capitato \mathbf{B}_i .

Se osserviamo \mathbf{A} , possiamo chiederci quale degli \mathbf{N} eventi \mathbf{B}_i lo ha causato, o meglio quale è la probabilità che è accaduto \mathbf{B}_i avendo osservato \mathbf{A} .

Si dimostra che (Teorema di Bayes)

$$(1.2) \quad P(B_i | A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A | B_i)}{\sum_{k=1}^N P(B_k) \cdot P(A | B_k)}$$

Si noti che, con questa relazione, si passa dalle probabilità $\mathbf{P}(\mathbf{A} | \mathbf{B}_i)$ alle $\mathbf{P}(\mathbf{B}_i | \mathbf{A})$, cioè dall'informazione sull'effetto delle \mathbf{B}_i su \mathbf{A} , tramite anche le $\mathbf{P}(\mathbf{B}_i)$, a "inferire" sulle cause dell'evento osservato \mathbf{A} .

Il teorema di Bayes, nel caso di una variabile casuale continua, diventa

$$(1.3) \quad f(x | y) = \frac{f_1(y | x) \cdot f_0(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y | x) \cdot f_0(x) \cdot dx}$$

dove f_0 è la distribuzione della variabile x e f_1 la distribuzione condizionale di y dato x .

Varianza della binomiale

Ricordiamo che il valor medio della distribuzione binomiale è $\mu = E[k] = N \cdot p$. Per la varianza dobbiamo calcolare

$$(1.4) \quad \sigma^2 = E[(k - \mu)^2] = \sum_{k=0}^N (k - \mu)^2 \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

Sviluppiamo la derivata seconda della potenza N-esima del binomio $(p+q)$. Abbiamo

$$(1.5) \quad \frac{\partial^2 (p+q)^N}{\partial p^2} = N(N-1)(p+q)^{N-2} = \sum_k k(k-1) \binom{N}{k} p^{k-2} q^{N-k}$$

moltiplichiamo gli ultimi due membri per p^2 ; abbiamo

$$(1.6) \quad \begin{aligned} N(N-1)p^2 &= N^2 p^2 - Np^2 = \sum_k k(k-1) \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = \\ &= E[k(k-1)] = E[k^2] - E[k] \end{aligned}$$

ora

$$(1.7) \quad \sigma^2 = E[(k - \mu)^2] = E[k^2] - 2\mu \cdot E[k] + \mu^2 = E[k^2] - \mu^2$$

che possiamo scrivere come

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \sigma^2 &= (E[k^2] - E[k]) + E[k] - E[k]^2 = \\ &= \cancel{N^2 p^2} - Np^2 + Np - \cancel{N^2 p^2} = Np(1-p) = Npq \end{aligned}$$

q.e.d. .

Allo stesso risultato si arriva considerando la variabile binomiale come la somma di N variabili di Bernoulli indipendenti. Poiché la varianza della distribuzione di Bernoulli è $p \cdot (1-p)$, la varianza di questa somma è $N \cdot p \cdot (1-p)$.

La stima bayesiana

La stima bayesiana integra informazioni *a priori* sulla grandezza da stimare e osservazioni (misure sperimentali), in modo da utilizzare al meglio tutte le informazioni disponibili.

Si noti che le informazioni a priori possono essere ricavate anche da misure precedenti; esse sono condensate nella **distribuzione a priori** sulla grandezza in esame. Da questa e dal risultato delle misure cambia lo stato di informazione, che è condensato nella **distribuzione a posteriori**. La teoria della stima bayesiana indica il modo di calcolarla.

Si può quindi utilizzare quest'ultima come distribuzione a priori per successive misure.

Se non si sa nulla "a priori", a parte vagamente il possibile intervallo della grandezza, si suppone una distribuzione a priori uniforme nell'intervallo.

I test non parametrici

Una caratteristica importante di un test statistico è la robustezza, cioè la qualità di essere efficace indipendentemente dalla distribuzione dei dati a cui si applica.

Per costruire test robusti, si è sviluppata la statistica non-parametrica (da contrapporsi a quella "parametrica" così chiamata per i parametri delle distribuzioni che si suppone seguano i dati). Presentiamo qui alcuni semplici test di statistica non-parametrica.

Test dei segni per la mediana

Nel caso di distribuzione simmetrica, questo è anche un test per il valor medio.

Si supponga di avere una successione $\{\mathbf{x}_i\} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ di dati e vogliamo testare se \mathbf{m} è la mediana.

Per far ciò, calcoliamo i segni dei valori $\{\mathbf{x}_i - \mathbf{m}\}$. Consideriamo il numero k dei valori positivi. Se \mathbf{m} è la mediana, k deve essere distribuito secondo una binomiale con parametri $p=0.5$ e N . Possiamo quindi eseguire un test con questa binomiale.

Test di Wilcoxon-Mann_Whitney

Usato per testare se due popolazioni sono statisticamente eguali.

Siano $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ e $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_M\}$ i campioni estratti dalle due popolazioni.

Si ordinano tutti in una singola successione. Associamo quindi a ciascun elemento il numero d'ordine che gli compete in questa nuova successione. Calcoliamo quindi \mathbf{W}_1 e \mathbf{W}_2 , le somme dei numeri d'ordine per i dati del primo gruppo e del secondo gruppo.

Costruiamo quindi le due variabili

$$(1.9) \quad U_1 = W_1 - \frac{N \cdot (N - 1)}{2}$$

e

$$(1.10) \quad U_2 = W_2 - \frac{M \cdot (M - 1)}{2}$$

Sotto l'ipotesi nulla, che i due campioni vengono dalla stessa popolazione, si trova che, per la variabile U_1 , si ha

$$(1.11) \quad \mu_{U_1} = \frac{N \cdot M}{2}$$

e

$$(1.12) \quad \sigma_{U_1}^2 = \frac{M \cdot N \cdot (N + M + 1)}{12}$$

Per N e M maggiori di 8, la distribuzione di U_1 è approssimabile con una gaussiana, per cui si può fare un test gaussiano.

Test di casualità

Data una successione di due simboli (per esempio testa e croce), si può testare la sua casualità contando il numero dei "run", cioè il numero di gruppi di simboli uguali contigui.

Se una successione contiene un numero N_1 di simboli del primo tipo e un numero N_2 di simboli del secondo, si trova che, se è casuale, il numero dei run, di tutte le lunghezze, ha una distribuzione approssimabile a una gaussiana con parametri

$$(1.13) \quad \mu = \frac{2N_1N_2}{N_1 + N_2} + 1$$

e

$$(1.14) \quad \sigma = \sqrt{\frac{2N_1N_2(2N_1N_2 - N_1 - N_2)}{(N_1 + N_2)^2(N_1 + N_2 - 1)}}$$

e si può fare quindi un test gaussiano.

Il metodo di Montecarlo

I metodi statistici sono spesso usati per eseguire calcoli numerici che tipicamente sono svolti con l'uso dell'analisi o dell'analisi numerica. Oppure per eseguire ed analizzare simulazioni di sistemi complessi.

Queste applicazioni della statistica al calcolo sono denominate "metodo di Montecarlo" così chiamato dalla località del noto Casino (ancora un termine che collega il gioco d'azzardo e il calcolo delle probabilità), introdotto dal matematico Stanislaw Ulam (1909-1984).

Indichiamo qui due semplici applicazioni del metodo:

- **L'ago di Buffon**, metodo statistico proposto dal naturalista francese Georges-Louis Leclerc Buffon (1707-1788) per calcolare il valore di π . Si tracciano su un piano orizzontale delle linee parallele a distanza d l'una dalla successiva. Si lasci poi cadere in modo casuale un ago di lunghezza d su questo piano. Si dimostra che la probabilità che l'ago "tagli" una delle linee parallele è $p = \frac{2}{\pi}$. Quindi eseguendo molti lanci dell'ago e calcolando la frequenza delle volte che l'ago incrocia le linee, si ha una stima di p e quindi, invertendo questa stima e moltiplicandola per 2, una stima di π .
- **Calcolo dell'area** di una figura piana complicata. In tal caso iscriviamo la figura in un quadrato di area nota. Scegliamo quindi dei punti del quadrato a caso (in modo uniforme su tutto il quadrato) e contiamo il numero dei punti che capitano all'interno della figura. Una stima dell'area è data dall'area del quadrato, moltiplicato il rapporto tra il numero dei punti interni e di tutti i punti. Questa tecnica può generalizzarsi al calcolo dei volumi di solidi o anche ad iper-volumi in più di 3 dimensioni.

Il "cuore" del metodo di Montecarlo è la generazione di numeri casuali. Nei calcolatori questi vengono generati da apposite funzioni⁷⁷. La funzione base genera semplicemente numeri casuali distribuiti uniformemente tra 0 e 1, e da questi sono poi generati numeri con altre distribuzioni.

⁷⁷ In effetti i numeri generati dal calcolatore non sono casuali, ma, se non se ne usano troppi, hanno molte delle proprietà statistiche dei numeri casuali. Per questo vengono chiamati "pseudo-casuali".

Valutazione dell'incertezza col metodo di Montecarlo

Per calcolare la propagazione delle incertezze in casi particolarmente complessi si può utilizzare il metodo di Montecarlo. L'idea è simulare per ciascuna variabile di partenza un numero molto elevato di "misure", distribuite secondo l'indicazione dell'incertezza relativa a quella variabile e quindi calcolare i risultati e farne la statistica.

Ciò è realizzato, per esempio, con la seguente funzione Matlab:

```
function [unc yhist yphist]=lm_uncert(fun,varargin)
% lm_uncert    computes uncertainty for a given function
%
%           [unc yhist yphist]=lm_uncert(fun,varargin)
%
%           fun    function handle (provided by the user, should be computed
%                   by array; if not, use lm_uncert_noarr)
%
%           varargin{i}=[val unc typ]
%
%           typ = 0    gauss (statistical error)
%           typ = 1    uniform (resolution error)
%           typ = 2    exponential
%           typ = 3    user-defined distribution (the user should provide the
function usernd)
%           if the last value of varargin is a scalar, that is the number of
simulations
%
%           unc.y      value
%           unc.yy     mean value
%           unc.ymedian median
%           unc.dy     total uncertainty
%           unc.sig1   ± unc, equalized to 1 gaussian sigma in prob (0.15865
and 0.84135)
%           unc.py(k)  partial mean value
%           unc.pdy(k) partial uncertainties

% Version 2.0 - April 2011
% Part of Snag toolbox - Signal and Noise for Gravitational Antennas
% by Sergio Frasca - sergio.frasca@roma1.infn.it
% Department of Physics - Università "Sapienza" - Rome

N=1000000;
NP=100000;
sigm=0.15865;
sigp=0.84135;
n=length(varargin);
strcom='y=fun(';
str1=strcom;

if length(varargin{1}) == 1
    N=varargin{1};
    NP=round(N/10);
    n=n-1;
end

r=zeros(n,N);
```

```

y=zeros(1,N);

for i = 1:n
    vars{i}=inputname(i+1);
    aa=varargin{i};
    val(i)=aa(1);
    uncer(i)=aa(2);
    typ(i)=aa(3);
    switch typ(i)
        case 0
            r(i,:)=val(i)+randn(1,N)*uncer(i);
        case 1
            r(i,:)=val(i)+(rand(1,N)-0.5)*2*uncer(i);
        case 2
            r(i,:)=val(i)*exprnd(1,1,N);
        case 3
            r(i,:)=val(i)+usernd(N)*uncer(i);
    end
    if i == 1
        strcom=[strcom sprintf('r(%d,%)',i)];
        str1=[str1 sprintf('val(%d)',i)];
    else
        strcom=[strcom sprintf(',r(%d,%)',i)];
        str1=[str1 sprintf(',val(%d)',i)];
    end
end

strcom=[strcom ');'];
str1=[str1 ');'];
kk=strfind(str1,',');
kk0=strfind(str1,');');
kk=[kk kk0];

eval(strcom);

unc.yy=mean(y);
unc.dy=std(y);
[yhist x]=hist(y,200);
dx=x(2)-x(1);
yhist=yhist/(N*dx);
aaa=prctile(y,[sigm 0.5 sigp]*100);
unc.ymedian=aaa(2);
unc.sig1=[aaa(1)-aaa(2) aaa(3)-aaa(2)];
figure,stair(x,yhist),grid on
figure,stair(x,yhist,'LineWidth',2,'Color','k'),grid on,hold on
yhist=gd(yhist);
yhist=edit_gd(yhist,'ini',x(1),'dx',dx);

eval(str1);
unc.y=y;

bi=6;
y=zeros(1,NP);

for i = 1:n
    switch typ(i)
        case 0
            r=val(i)+randn(1,NP)*uncer(i);
        case 1

```

```

        r=val(i)+(rand(1,NP)-0.5)*2*uncer(i);
    case 2
        r=val(i)*exprnd(1,1,NP);
    end
    str2=[str1(1:bi) 'r' str1(kk(i):length(str1))];
    bi=kk(i);
    eval(str2);
    unc.py(i)=mean(y);
    unc.pdy(i)=std(y);
    yhist1=hist(y,x)/(NP*dx);
    col=rotcol(i);
    stairs(x,yhist1,'color',col),grid on
    yhist1=gd(yhist1);
    yhist1=edit_gd(yhist1,'ini',x(1),'dx',x(2)-x(1));
    yphist{i}=yhist1;
end

set(gca,'YScale','log');
unc.vars=vars;
unc.varsval=val;
unc.varsunc=uncer;
unc.varstyp=typ;

fprintf('\n')
fprintf('          Output value: %f \n',unc.y)
fprintf('          mean value: %f \n',unc.yy)
fprintf('          median: %f \n',unc.ymedian)
fprintf('  symmetrical uncertainty: %f \n',unc.dy)
fprintf('asymmetrical uncertainties: %f %f\n',unc.sig1)
if unc.y ~= 0
    fprintf('          relative uncertainty: %f \n\n',unc.dy/abs(unc.y))
end

fprintf('          Partial uncertainties \n\n')
fprintf(' variable      value      vunc.      relun      part.unc.
weight\n')

for i = 1:n
    switch typ(i)
        case 1
            un=uncer(i)/sqrt(3);
        otherwise
            un=uncer(i);
    end
    relun=un/abs(val(i));
    weig=unc.pdy(i)/(relun*unc.y);
    fprintf(' %7s      %f      %f      %f      %f
%f\n',vars{i},val(i),un,relun,unc.pdy(i),weig)
end

```

Ecco un caso pratico (misura di g con un pendolo fisico), usando la funzione

```

function [g I M0 x0 r]=pend_blocsup(Ix,Mb,lb,b,M1,r1,r2,h,T0)
% pend_nobloc da usare per lm_uncert

x0=lb-(lb/2-b)-h/2;
I=Ix+(Mb.*lb.^2)/12+Mb.*b.^2+(M1/12).*(3*(r1.^2+r2.^2)+h.^2)+M1.*x0.^2;
M0=Mb+M1;
r=(Mb.*b+M1.*x0)./(M1+Mb);

```

```
g=4*pi.^2.*I./ (T0.^2.*M0.*r);
```

cd il “driver”

```
% driver_pend_blocsup
```

```
Ix=[42.1 2.6 0];  
Mb=[27.23 0.01 1];  
lb=[38.10 0.01 1];  
b=[16.50 0.01 1];  
M1=[75.51 0.01 1];  
r1=[0.79/2 0.01 1];  
r2=[2.53/2 0.01 1];  
h=[2.025 0.010 1];  
T0=[1.1545 0.0002 0];
```

```
[unc2 yhist2 yphist2]=lm_uncert(@pend_blocsup,Ix,Mb,lb,b,M1,r1,r2,h,T0)
```

Ed ecco i risultati:

```
Output value: 978.528265  
mean value: 978.528314  
median: 978.528716  
symmetrical uncertainty: 0.479470  
asymmetrical uncertainties: -0.480852 0.480187  
relative uncertainty: 0.000490
```

Partial uncertainties

variable	value	vunc.	relun	part.unc.	weight
Ix	42.100000	2.600000	0.061758	0.090987	0.001506
Mb	27.230000	0.005774	0.000212	0.024387	0.117544
lb	38.100000	0.005774	0.000152	0.153372	1.034329
b	16.500000	0.005774	0.000350	0.000000	0.000000
M1	75.510000	0.005774	0.000076	0.008946	0.119572
r1	0.395000	0.005774	0.014616	0.003019	0.000211
r2	1.265000	0.005774	0.004564	0.009664	0.002164
h	2.025000	0.005774	0.002851	0.113441	0.040661
T0	0.910100	0.000200	0.000220	0.428217	1.991361

Montecarlo per la valutazione dell'incertezza in modo semplificato

Talvolta si valuta l'incertezza (sulla singola misura) di una misura ripetuta tre volte prendendo la semidifferenza tra la massima e la minima. Quale è la validità di questa procedura? Per valutarlo è stato realizzato un montecarlo che valuta l'incertezza con la stima (non distorta) della deviazione standard e con il metodo della semidifferenza tra massima e minima. I dati simulati sono distribuiti secondo una normale standardizzata, quindi l'incertezza aspettata, assimilata alla deviazione standard è 1.

Ecco il semplice programma in Matlab:

```
N=1000000;
me=zeros(1,N);
sd=me;
sdl=sd;

for i = 1:N
    r=randn(1,3); % 3 numeri casuali con distribuzione normale standardizzata
    me(i)=mean(r);
    sd(i)=std(r);
    sdl(i)=(max(r)-min(r))/2;
end

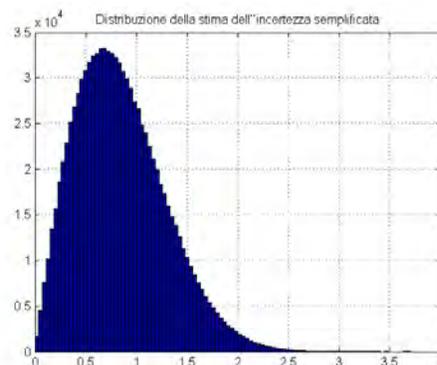
mean(me)
std(me)
figure,hist(me,100),title('Distribuzione della media'),grid on

mean(sd)
std(sd)
figure,hist(sd,100),grid on
title('Distribuzione della stima della deviazione standard')
mean(sdl)
std(sdl)
figure,hist(sdl,100),grid on
title('Distribuzione della stima dell''incertezza semplificata')
```

Ed ecco i risultati:

	In teoria	Stima della dev.st.	Metodo semplificato
Incertezza valutata	1	0.886	0.846
σ sull'incertezza	-	0.463	0.444

Ed ecco gli istogrammi dei dati ottenuti:



Possiamo ora domandarci come vanno i due metodi di valutazione dell'incertezza se invece che operare su 3 misure lo si fa su un altro numero N. Ecco il programma:

```

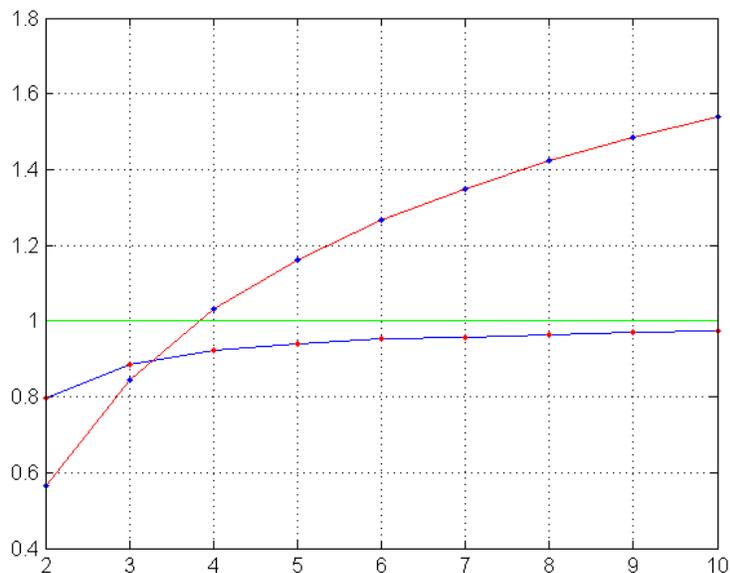
N=100000;
sd=zeros(1,N);
sd1=sd;
msd=zeros(1,9);
msd1=msd;

for j = 1:9
    for i = 1:N
        r=randn(1,j+1); % 3 numeri casuali con distribuzione normale standardizzata
        sd(i)=std(r);
        sd1(i)=(max(r)-min(r))/2;
    end
    msd(j)=mean(sd);
    msd1(j)=mean(sd1);
end

figure,plot(2:10,msd),hold
on,plot(2:10,msd,'r.'),plot(2:10,msd1,'r'),plot(2:10,msd1,'. '),grid on

```

e i risultati:



Si noti che la stima dell'incertezza fatta con la semi-differenza tra la massima e la minima misura è abbastanza ragionevole nel caso in cui N è uguale a 3 o a 4 (simile o migliore alla stima della deviazione standard, mentre per $N > 4$ dà risultati in eccesso. Per $N=2$ una stima ragionevole dell'incertezza è prendere semplicemente la differenza tra la massima e la minima misura (il valore atteso è circa 1.13).

Effetto dither (“tremarella”)

Talora la presenza di errori casuali nelle misure può migliorare la precisione della misura. Ciò accade quando è dominante l'errore di lettura.

Facciamo un esempio. Supponiamo di avere per esempio una bilancia digitale con le divisioni da 0.1 grammi (errore di lettura $\Delta l=0.05$ g) e dobbiamo pesare un oggetto di massa $m=37.1393$ grammi. Supponiamo di non avere errori casuali, (né ovviamente errori sistematici): per quante volte ripetiamo la misura, otterremo sempre 37.1 g, che indica che l'intervallo di misura è compreso tra 37.05 e 37.15 g, con un'incertezza statistica equivalente di $0.05/\sqrt{3}$ g ≈ 0.029 g.

Ora supponiamo di avere un errore casuale di $\sigma = 0.03$ g. Ripetiamo n volte la misura e troveremo non sempre lo stesso valore indicato dalla bilancia, ma a volte 37.1, a volte 37.2, a volte (con probabilità bassa) altri valori. La stima del valore vero può farsi, in approssimazione, facendo la media e l'incertezza sulla media calcolata, in grammi, come

$$(1.15) \quad \Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{\Delta l^2}{3n} + \frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{0.029^2 + 0.03^2}{n}} = \frac{0.0417}{\sqrt{n}}$$

Se per esempio ripetiamo la misura 1000 volte, l'incertezza è 0.0016 g, molto migliore di quella ottenuta senza l'errore casuale (che in questo caso, tra l'altro, è statisticamente maggiore dell'errore di lettura).

Questa stima del valore fatto con la media risulta però distorta (la grandezza della distorsione dipende dalla grandezza dell'errore casuale e dell'errore di lettura. Possiamo costruire un diverso stimatore non distorto nel seguente modo:

- I dati senza l'errore di lettura sono distribuiti gaussianamente con media m incognita e deviazione standard σ nota (o stimata dai dati). Osserviamo che la misura incognita si trova tra 37.1 e 37.2. Calcoliamo la frazione dei valori misurati inferiori a 37.2 (ovvero a 37.15) e sia questa p . Dalla tabella della distribuzione integrale gaussiana standardizzata troviamo lo scarto s che corrisponde a p . Il valore stimato di m è quindi

$$(1.16) \quad \tilde{m} = 37.15 - s \cdot \sigma$$

Ecco una tabella di alcune simulazioni (ricordiamo che senza il rumore casuale aggiunto il risultato della misura era sempre 37.1):

N	Media	Stimatore avanzato
10	37.1400	37.1424
100	37.1370	37.1400
1000	37.1364	37.1396
10000	37.1359	37.1393

Suggerimenti per la stesura delle relazioni

Le relazioni vanno svolte su un quaderno o un raccoglitore grande (formato A4). Possono anche essere scritte con un word processor.

È bene che le pagine, le tabelle, le figure e le formule siano numerate, almeno quando se ne fa riferimento nel testo.

Ogni relazione deve riportare il titolo dell'esperienza, la data, i componenti del gruppo.

Va riportato all'inizio brevemente lo scopo dell'esperienza e il materiale a disposizione ed eventualmente lo schema dell'apparato, con le eventuali dimensioni di interesse. Per gli strumenti a disposizione, riportare la sensibilità.

Si può fare una, molto breve, introduzione teorica, riportando le formule teoriche che si useranno.

Vanno riportate le misure effettuate (eventualmente anche in fotocopia), eventualmente organizzate in tabelle ordinate. Riportare inoltre le incertezze delle misure effettuate.

Si elaborano quindi i dati e si presentano i risultati, con eventuali brevi commenti sulla procedura e sui problemi trovati.

Qualsiasi elaborazione dei dati (per esempio misure indirette, valutazione dell'incertezza,...) deve riportare la formula teorica.

Qualsiasi risultato finale deve essere scritto con l'incertezza, nel modo corretto (vedi capitolo 4).

Vanno evidenziati eventuali risultati inaspettati o "strani".

I grafici devono avere le unità sugli assi e i punti sperimentali devono riportare le incertezze, se apprezzabili, per entrambe le variabili indipendente e dipendente.

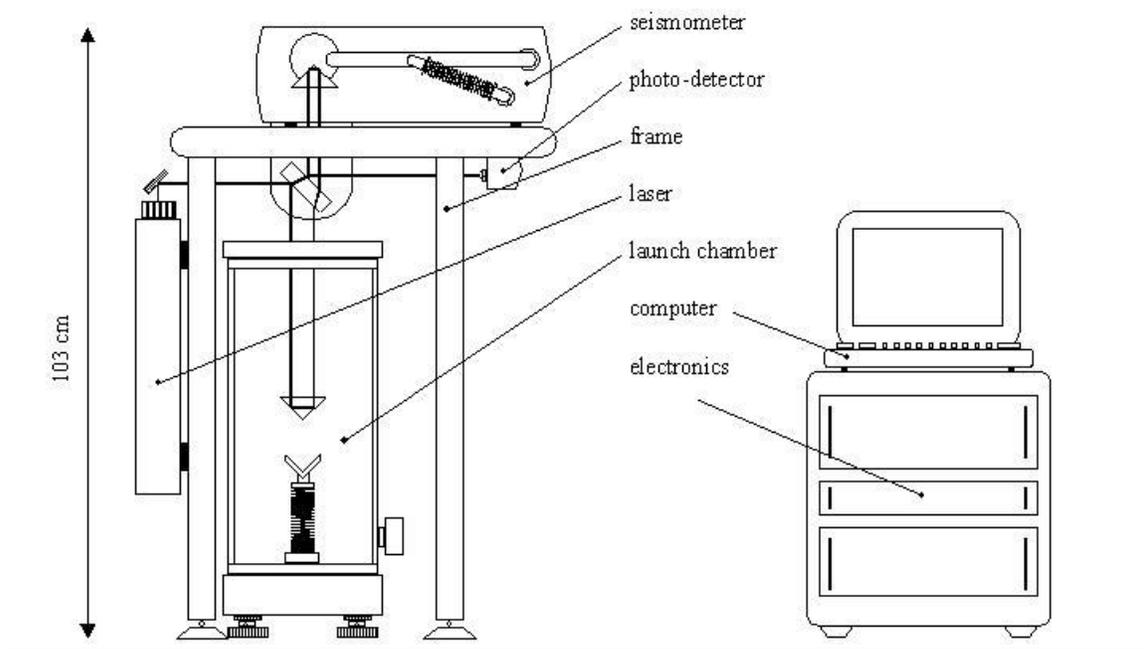
Evitare di interpolare tra i punti sperimentali se non con rette (a parte casi particolari, per esempio con fit non lineari fatti al calcolatore).

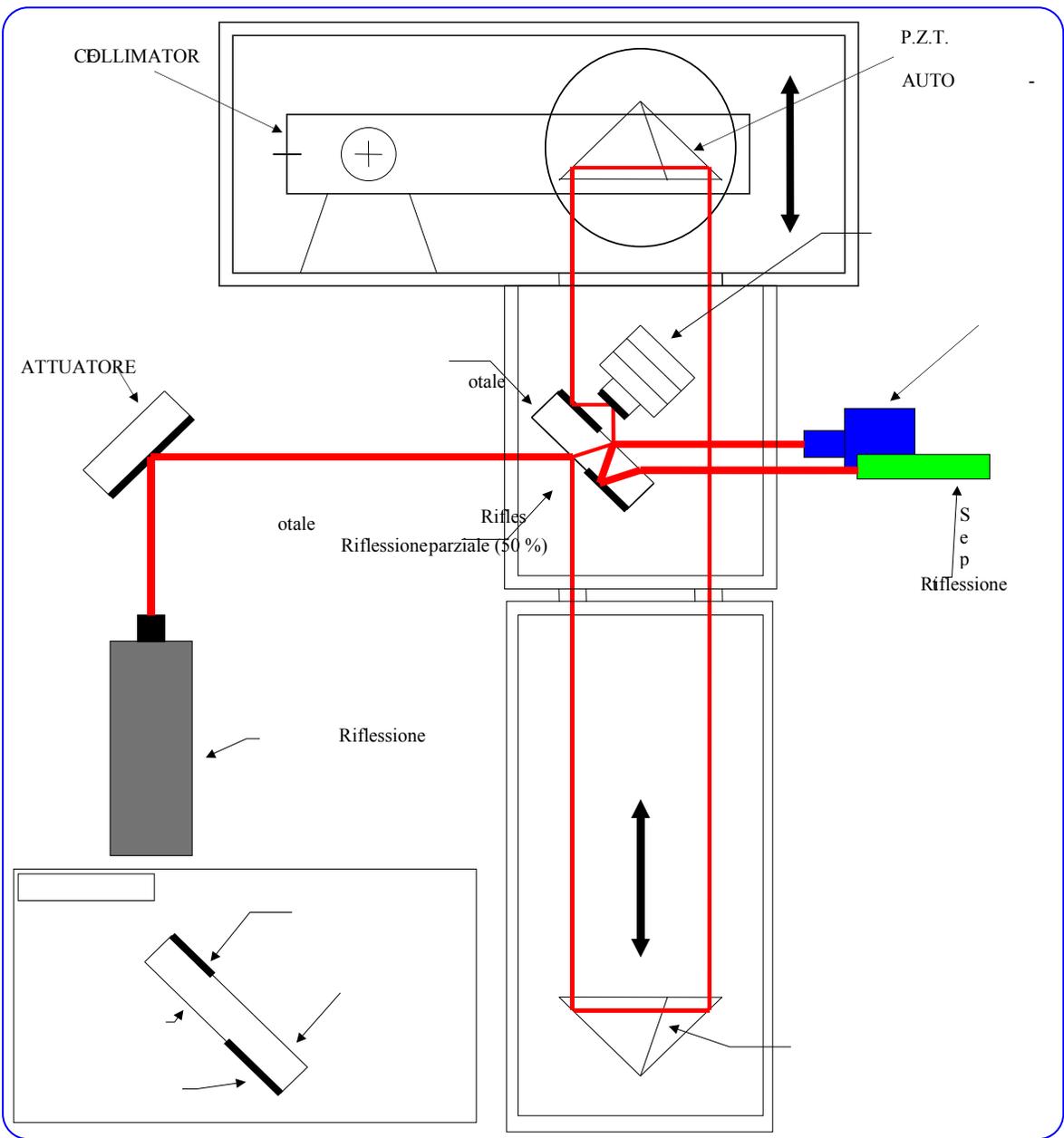
Per alcune esperienze viene fornito un résumé (Quadro Riassuntivo) che va allegato alla fine della relazione.

Figure, tabelle, fotocopie delle misure originali e la scheda riassuntiva possono essere incollate sui fogli del quaderno.

È molto importante organizzare in modo ordinato le informazioni nella relazione.

Il gravimetro assoluto IMGC-02







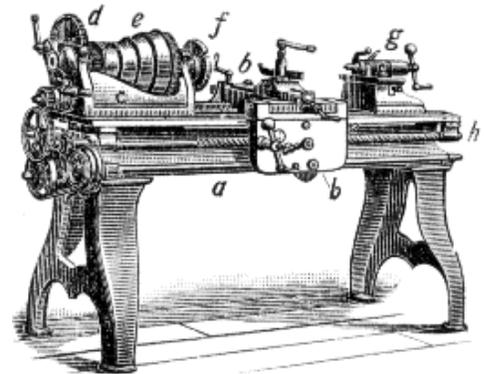
L'officina meccanica

L'officina meccanica è l'ambiente di lavoro in cui si eseguono lavorazioni meccaniche su metallo o altro materiale. Essa è di fondamentale ausilio per la realizzazione di molte attività di fisica sperimentale. Descriviamo qui molto brevemente alcune delle macchine utensili utilizzate nell'officina meccanica⁷⁸.

- Il **tornio** (in inglese **lathe**)

Il tornio è una macchina utensile utilizzata per la lavorazione di un pezzo posto in rotazione (in genere, quindi, a simmetria circolare). I primi torni, usati per la costruzione di vasi, risalgono al neolitico; nella forma moderna il tornio si è sviluppato durante la rivoluzione industriale. In esso il pezzo in lavorazione viene montato tramite un mandrino autocentrante su un supporto che viene posto in rotazione; l'utensile che esegue la lavorazione è montato su un portautensili posto su un carrellino.

Nei torni di oggi la lavorazione, e quindi la rotazione e lo spostamento dell'utensile, viene controllata da un computer.



Lathe, p. 1218.



In figura il tornio Schaublin 180 CCN a controllo numerico, con caratteristiche base:

- Massima distanza fra le punte: 650mm
- Diametro massimo di tornitura: 300mm
- Risoluzione: 1 μ m
- Velocità di rotazione: 3000 giri/min.

⁷⁸ Alcune delle foto e informazioni sono state messe a disposizione dal Servizio Officina Meccanica INFN presso il Dipartimento di Fisica dell'Università Sapienza. Si ringraziano in particolare Corrado Gargiulo e Fabio Pellegrino.

- La **fresatrice** (in inglese **milling machine**)

La fresatrice viene utilizzata per lavorazioni di forme più complesse. Nella fresatrice è l'utensile (fresa) che ruota. Oggi sono sempre più diffuse le fresatrici a controllo numerico.

In figura è la fresatrice di precisione "C.B. Ferrari A15" a cinque assi (tre di posizione e due di inclinazione), a controllo numerico:



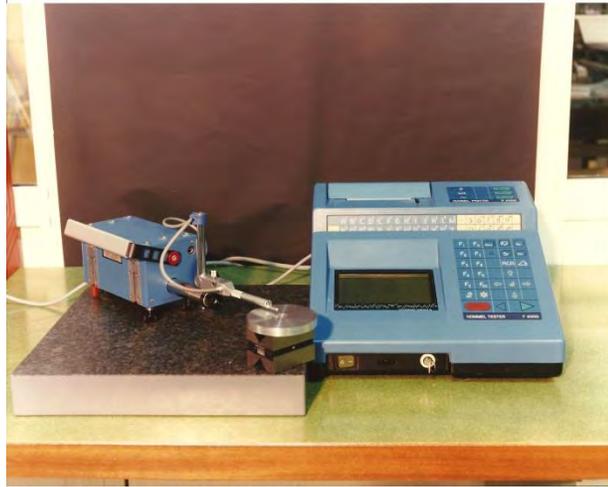
- Il **trapano a colonna** (**bench drill**)

Il trapano a colonna è utilizzato per fare fori o, con punte particolari, altri tipi di lavorazione. Il trapano è di origine antichissima, risalendo al neolitico. In figura un tipico esempio di trapano a colonna odierno.



Nell'officina meccanica sono spesso presenti anche raffinati strumenti di misura, per esempio

- Il **rugosimetro**, per la misura e la valutazione delle microirregolarità di una superficie. È in grado di misurare con una precisione che può raggiungere il millesimo di micron. In figura è il rugosimetro Hommelwerke Hommel tester T4000, in grado di fornire il grafico del profilo della superficie testata e la stampa dei parametri, delle statistiche e delle tolleranze:



Possono esserci anche sistemi di misurazione più complessi come il Poli Galaxy Diamond, un sistema di misurazione tridimensionale a contatto controllato da un PC, in grado di fare operazioni di misurazione automatizzate, di grande precisione (vedi figura).



Una leggenda urbana

(rielaborato da un articolo pubblicato da Alexander Calandra su Saturday Review, Dec 21, 1968)
(argomento semi-serio)

È, come ogni leggenda urbana, riferita come una storia vera (?).

All'esame di Fisica, venne chiesto ad uno studente come eseguire la misura dell'altezza di un edificio utilizzando un barometro.

Dopo una breve riflessione lo studente rispose:

"Lego un filo al barometro, lo calo giù dalla tetto fino a terra e misuro la lunghezza del filo".

L'esaminatore, perplesso, gli disse che questo metodo, sebbene raggiungesse lo scopo, non mostrava nessuna conoscenza di Fisica e quello era un esame di Fisica. Gli ripropose la domanda, specificando che si usassero conoscenze di Fisica.

Lo studente ci pensò un po' e poi rispose:

"Porto il barometro sul tetto, lo lascio cadere misurando il tempo di caduta e, conoscendo l'accelerazione di gravità, ricavo l'altezza dell'edificio".

All'esaminatore non era chiaro se lo studente stesse scherzando o se semplicemente ignorasse la legge di variazione della pressione atmosferica con l'altezza sul livello del mare e quindi gli chiese se conoscesse altri metodi. Lo studente rispose:

"Certo, ce ne sono vari. Per esempio, senza salire sul tetto, in una giornata di sole posso misurare l'altezza dell'ombra del barometro e la lunghezza di quella dell'edificio e dal rapporto tra le due e dall'altezza del barometro ricavo quella dell'edificio. Oppure, se l'edificio ha una scala esterna, posso segnare sul muro ripetutamente la lunghezza del barometro e contare quanti segni ho fatto (valutando anche l'ultima frazione). Un altro modo, più sofisticato, è attaccare il barometro a un filo e lasciarlo pendolare, misurando poi il periodo di oscillazione a terra e sul tetto: dalla differenza di valore misurato si può calcolare la differenza di g (che dipende dall'altezza sul livello del mare) e quindi l'altezza dell'edificio. Ma probabilmente il metodo migliore è andare dall'amministratore e offrirgli il barometro in cambio dell'informazione sull'altezza dell'edificio".

L'esaminatore esasperato gli chiese se conoscesse un metodo che facesse un uso "proprio" del barometro. A questo punto pare che lo studente abbia risposto che sì, lo conosceva, ma che era stufo di istruttori che cercavano di insegnargli come si dovesse pensare e che riteneva più interessante esplorare possibilità non ovvie.

Analisi dei metodi di misura proposti dallo studente

Lo studente "creativo" del racconto precedente ha proposto vari metodi di misura. Analizziamoli brevemente alla luce degli argomenti sviluppati in questo corso.

Innanzitutto si parla dell'altezza di un edificio. Cosa è? L'altezza dal terreno (dal marciapiede o dal piano stradale? e se il terreno non è assolutamente in piano, da dove?) al tetto (contano eventuali pennoni o antenne?). Si deve comunque fare un modello semplificato (vedi capitolo 1) dell'edificio e identificare l'altezza come uno dei parametri di questo modello.

Inoltre supponiamo che il "valore vero" dell'altezza dell'edificio sia 20 m. Dovremo inoltre fare delle ipotesi anche sulle caratteristiche del barometro e su quella della strumentazione ausiliaria per fare le varie misure (cronometro, misuratore di lunghezza, ecc.), che in effetti non erano stati previsti dall'esaminatore.

Analizziamo ora i vari metodi proposti:

a) Calare il barometro dal tetto con un filo e misurare la lunghezza del filo

La misura è semplice. Con un po' di cura (fare attenzione all'elasticità del filo, alle variazioni di temperatura e alla metodologia di misura) si può ragionevolmente arrivare ad incertezze relative dell'ordine di 0.001.

b) Lasciar cadere il barometro dal tetto e misurare il tempo di caduta

L'equazione è

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

la g del luogo si può supporre nota con almeno 4 cifre significative; inoltre la variazione di g con l'altezza, per 20 m, è dell'ordine di circa 6 parti per milione (vedi paragrafo precedente sulla misura di g) e quindi è trascurabile. Se il tempo di caduta (circa 2 secondi) viene misurato con l'incertezza di 0.1 secondi (quindi con l'incertezza relativa di 0.05), si ha un'incertezza relativa su h di circa 0.1. Con un migliore metodo di misura si può ovviamente migliorare l'incertezza (ma attenzione alla resistenza dell'aria).

c) Misura delle ombre

Dato che il sole non è una sorgente luminosa puntiforme, il contorno delle ombre non è ben definito. Inoltre se le forme dell'edificio e del barometro sono un po' complicate, la misura non è facilissima. Una valutazione dell'altezza con incertezza relativa di circa 0.02 dovrebbe essere comunque possibile.

d) Usare il barometro come righello

Supponiamo che il barometro sia alto un metro e nel riportarne la lunghezza sul muro esterno commettiamo un errore casuale di cinque millimetri. In tal caso l'incertezza assoluta è

$$\frac{20 \cdot 5 \text{ mm}}{\sqrt{20}} = 5 \cdot \sqrt{20} \text{ mm} \approx 20 \text{ mm}, \text{ quindi un'incertezza relativa di circa } 0.001.$$

e) Usare il barometro come pendolo

Tra il tetto e il livello stradale la variazione di g è circa di 6 parti per milione. È difficile fare misure di periodo per un pendolo rozzo come un barometro attaccato a un filo con precisioni di quest'ordine.

Se la misura di g , invece che con un rozzo pendolo fosse fatta con un buon gravimetro (incertezza relativa dell'ordine di 10^{-9} o meglio), la misura di altezza dell'edificio potrebbe farsi molto bene (anzi sarebbe uno dei metodi migliori).

f) "Corrompere" l'amministratore

L'amministratore ha probabilmente i valori di progetto. Questa ovviamente non è una misura. Potrebbe essere interessante confrontare una misura accurata con i valori di progetto. Se ci fossero delle forti discrepanze non giustificate da validi motivi, ci si potrebbe preoccupare.

g) Uso "proprio" del barometro

Supponiamo che il barometro usato sia un barometro a mercurio, per esempio del tipo di Fortin, che permette misure di alta sensibilità (con un nonio si riesce a valutare il decimo di millimetro di mercurio).

Anche senza conoscere la legge di variazione della pressione atmosferica con l'altezza sul livello del mare ($P = P_0 \cdot e^{-\frac{h}{k}}$, dove P_0 è la pressione al livello del mare, h l'altezza sul livello del mare e k una costante pari a circa 8500 m), si può valutare l'altezza dell'edificio semplicemente conoscendo il rapporto tra le densità del mercurio e dell'aria (in condizioni standard di temperatura e pressione), che è $\frac{13.6 \cdot 10^3}{1.29} = 10540$, e facendo una misura di differenza di pressione $D = (P_{strada} - P_{tetto})$ tra il livello stradale e il tetto. Misurando D in millimetri di mercurio (per un edificio di 20 m, vale circa 1.9 mm), si ha per l'altezza h dell'edificio espressa in metri:

$$h = D \cdot 10.54$$

L'incertezza su h è dovuta all'incertezza su D . Dato il legame lineare tra le due grandezze, l'incertezza relativa su h è pari a quella su D , che è circa 0.05.

Qualche sito di interesse per il corso

Siti locali

Sito del corso : <http://grwavsf.roma1.infn.it/labmec/>

Sito del software LabMec: <http://grwavsf.roma1.infn.it/labmec/mlsoft/>

Sito di SnagLab: <http://grwavsf.roma1.infn.it/snaglab/>

Sito del Dipartimento : <http://www.phys.uniroma1.it/>

Istituzioni

L'Istituto Colonnetti : <http://www.inrim.it/>

Il Sistema Internazionale : http://www.inrim.it/ldm/cd_ldm/html/

Beureau International des Poids et Measures : <http://www.bipm.fr/>

The Meter Convention : <http://www1.bipm.org/en/convention/>

National Institute of Standard and Technology : <http://www.nist.gov/>

Physical Reference Data (constants, units, uncertainties) :
<http://physics.nist.gov/cuu/>

Applet

L'ago di Buffon : <http://www.mste.uiuc.edu/reese/buffon/bufjava.html>

Statistical Java : <http://www.causeweb.org/repository/statjava/>

Alfabeto greco

A	α	alfa
B	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ε	epsilon
Z	ζ	zeta
H	η	eta
Θ	θ, ϑ	theta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mu
N	ν	nu
Ξ	ξ	xi
O	ο	omicron
Π	π	pi
P	ρ	rho
Σ	σ, ς	sigma
T	τ	tau
Υ	υ	upsilon
Φ	φ, ϕ	phi
X	χ	chi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

Tabelle fisiche e statistiche

Costanti fisiche

(valori in aggiornamento)

velocità della luce	299792458 m/s
permeabilità magnetica del vuoto	$4 \cdot \pi_{\text{greco}} \cdot 10^{-7}$ H/m
permettività dielet. del vuoto	$8.854187817 \cdot 10^{-12}$ F/m
carica elementare (elettrone)	$1.602176462 \cdot 10^{-19}$ C
quanto di flusso magnetico	$2.06783461 \cdot 10^{-15}$ Wb
numero di Avogadro	$6.02214199 \cdot 10^{23}$ mol ⁻¹
unità di massa atomica	$1.6605402 \cdot 10^{-27}$ kg
unità di massa atomica	931.5016 MeV
costante gravitazionale	$6.67259 \cdot 10^{-11}$ N·m ² /kg ²
costante di Planck	$6.6260755 \cdot 10^{-34}$ J·s
costante di Boltzmann	$1.380658 \cdot 10^{-23}$ J/K
cost. di Stefan-Boltzmann	$5.67051 \cdot 10^{-8}$ W/(m ² ·K ⁴)
costante di struttura fine (inversa)	137.0359895
costante di Rydberg	10973731.534 m ⁻¹
1 eV	$1.60217733 \cdot 10^{-19}$ J
1 anno siderale	$3.1558149984 \cdot 10^7$ s
1 anno luce	$9.4605 \cdot 10^{15}$ m
1 unità astronomica	$1.495985 \cdot 10^{11}$ m
1 parsec	$3.0856 \cdot 10^{16}$ m
1 massa solare	$1.989 \cdot 10^{30}$ kg
massa della Terra	$5.977 \cdot 10^{24}$ kg
raggio equatoriale terrestre	$6.37817 \cdot 10^6$ m

Tabelle dei materiali

Nella seguenti tabelle sono raccolti alcuni dati relativi a materiali comuni.

Per i solidi sono indicati la densità, il coefficiente di dilatazione termica lineare e il modulo di Young.

Per i liquidi sono indicati la densità, il coefficiente di dilatazione termica volumica, il coefficiente di compressibilità (volumica) e la viscosità relativa.

Per i gas è indicata la sola densità.

Solidi			
Materiale	Densità (g/cm³)	Coeff. di dilatazione termica lineare (10⁻⁶K⁻¹)	Modulo di Young (10⁹Pa)
acciaio	7.8	12	200
alluminio	2.70	23.2	71
argento	10.50	19.2	77
elastomeri (p.es. gomma)	0.85 ~ 1.1	...	0.005
ferro	7.87	11.7	220
ghiaccio (269 K)	0.917	50	3
ghisa	7.3	11	100
legno	0.15 ~ 1.26	~5	10 ~ 20
oro	19.3	14	79
ottone	8.5	21	100
piombo	11.35	28.9	15
platino	21.5	8.9	165
polietilene	0.93	180	0.5
porcellana	2.4	2.5	70 ~ 80
quarzo	2.2 ~ 2.5	0.4	70
rame	8.96	16.8	124
sughero	0.20 ~ 0.35		
vetro	2.5 ~ 2.6	8 ~ 9	50 ~ 100
zinco	7.13	29.7	93

Liquidi				
Materiale	Densità (g/cm³)	Coeff. di dilatazione termica volumica (10⁻⁶K⁻¹)	Compressibilità volumica (10⁻⁹ Pa⁻¹)	Viscosità a 20 °C (cP)
acqua	0.998	210	0.459	1.003
alcol etilico	0.80	1100	1.12	1.2
mercurio	13.5	182	0.0401	1.55
olio (d'oliva)	0.92	0.72		84

Gas		
Materiale	Densità (g/cm³)	Viscosità a 20 °C (cP)
aria	0.001293	0.0183
anidride carbonica	1.986	0.0148
azoto	0.00125	0.0174
elio	0.000178	0.019
idrogeno	0.000090	0.0087
metano	0.00072	0.020
ossigeno	0.00143	0.0202

Valori di g per le province italiane (Gazzetta Ufficiale)

7-6-1999

GAZZETTA UFFICIALE DELLA REPUBBLICA ITALIANA

Serie generale - n. 131

TABELLA 3 - Valori di g delle province

CAPOLUOGO	gravità ms ⁻²	CAPOLUOGO	gravità ms ⁻²	CAPOLUOGO	gravità ms ⁻²
Agrigento	9,79823	Genova	9,80559	Potenza	9,79970
Alessandria	9,80496	Gorizia	9,80636	Prato	9,80484
Ancona	9,80402	Grosseto	9,80425	Ragusa	9,79769
Aosta	9,80375	Imperia	9,80508	Ravenna	9,80440
Arezzo	9,80389	Isernia	9,80161	Reggio Calabria	9,80063
Ascoli Piceno	9,80317	L'Aquila	9,80129	Reggio Emilia	9,80414
Asti	9,80471	La Spezia	9,80552	Rieti	9,80264
Avellino	9,80175	Latina	9,80330	Rimini	9,80439
Bari	9,80324	Lecce	9,80247	Roma	9,80352
Belluno	9,80562	Lecco	9,80519	Rovigo	9,80605
Benevento	9,80247	Livorno	9,80516	Salerno	9,80269
Bergamo	9,80471	Lodi	9,80491	Sassari	9,80184
Biella	9,80437	Lucca	9,80516	Savona	9,80559
Bologna	9,80419	Macerata	9,80318	Siena	9,80380
Bolzano	9,80548	Mantova	9,80520	Siracusa	9,80034
Brescia	9,80456	Massa	9,80508	Sondrio	9,80534
Brindisi	9,80270	Matera	9,80072	Taranto	9,80231
Cagliari	9,80096	Messina	9,80082	Teramo	9,80269
Caltanissetta	9,79676	Milano	9,80505	Terni	9,80359
Campobasso	9,80092	Modena	9,80416	Torino	9,80577
Caserta	9,80265	Napoli	9,80296	Trapani	9,80052
Catania	9,80040	Novara	9,80471	Trento	9,80596
Catanzaro	9,80002	Nuoro	9,80027	Treviso	9,80631
Chieti	9,80237	Oristano	9,80172	Trieste	9,80653
Como	9,80516	Padova	9,80652	Udine	9,80609
Cosenza	9,80120	Palermo	9,80054	Varese	9,80451
Cremona	9,80511	Parma	9,80427	Venezia	9,80631
Crotone	9,80084	Pavia	9,80481	Verbania	9,80544
Cuneo	9,80264	Perugia	9,80314	Vercelli	9,80465
Enna	9,79571	Pesaro	9,80439	Verona	9,80644
Ferrara	9,80447	Pescara	9,80326	Vibo Valentia	9,79916
Firenze	9,80483	Piacenza	9,80459	Vicenza	9,80643
Foggia	9,80267	Pisa	9,80513	Viterbo	9,80294
Forlì	9,80435	Pistoia	9,80500		
Frosinone	9,80246	Pordenone	9,80629		

Distribuzione cumulativa normale standardizzata

z	centesimi z									
	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.500000	0.503989	0.507978	0.511967	0.515953	0.519939	0.523922	0.527903	0.531881	0.535856
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555670	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345
0.2	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092
0.3	0.617911	0.621719	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
0.4	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933
0.5	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705402	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405
0.6	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903
0.7	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236
0.8	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802338	0.805106	0.807850	0.810570	0.813267
0.9	0.815940	0.818589	0.821214	0.823814	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913
1	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143
1.1	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.878999	0.881000	0.882977
1.2	0.884930	0.886860	0.888767	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.3	0.903199	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914656	0.916207	0.917736
1.4	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888
1.5	0.933193	0.934478	0.935744	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083
1.6	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486
1.7	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959071	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273
1.8	0.964070	0.964852	0.965621	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621
1.9	0.971284	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705
2	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691
2.1	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738
2.2	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989
2.3	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576
2.4	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613
2.5	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201
2.6	0.995339	0.995473	0.995603	0.995731	0.995855	0.995975	0.996093	0.996207	0.996319	0.996427
2.7	0.996533	0.996636	0.996736	0.996833	0.996928	0.997020	0.997110	0.997197	0.997282	0.997365
2.8	0.997445	0.997523	0.997599	0.997673	0.997744	0.997814	0.997882	0.997948	0.998012	0.998074
2.9	0.998134	0.998193	0.998250	0.998305	0.998359	0.998411	0.998462	0.998511	0.998559	0.998605
3	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999
3.1	0.999032	0.999064	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289
3.2	0.999313	0.999336	0.999359	0.999381	0.999402	0.999423	0.999443	0.999462	0.999481	0.999499
3.3	0.999517	0.999533	0.999550	0.999566	0.999581	0.999596	0.999610	0.999624	0.999638	0.999650
3.4	0.999663	0.999675	0.999687	0.999698	0.999709	0.999720	0.999730	0.999740	0.999749	0.999758
3.5	0.999767	0.999776	0.999784	0.999792	0.999800	0.999807	0.999815	0.999821	0.999828	0.999835
3.6	0.999841	0.999847	0.999853	0.999858	0.999864	0.999869	0.999874	0.999879	0.999883	0.999888
3.7	0.999892	0.999896	0.999900	0.999904	0.999908	0.999912	0.999915	0.999918	0.999922	0.999925
3.8	0.999928	0.999930	0.999933	0.999936	0.999938	0.999941	0.999943	0.999946	0.999948	0.999950
3.9	0.999952	0.999954	0.999956	0.999958	0.999959	0.999961	0.999963	0.999964	0.999966	0.999967
4	0.999968	0.999970	0.999971	0.999972	0.999973	0.999974	0.999975	0.999976	0.999977	0.999978
4.1	0.999979	0.999980	0.999981	0.999982	0.999983	0.999983	0.999984	0.999985	0.999985	0.999986

Valori del χ^2 per un dato livello di fiducia

Livello di fiducia	0.9	0.95	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.9999
Gradi di libertà							
1	2.706	3.841	6.635	7.879	10.827	12.115	15.134
2	4.605	5.991	9.210	10.597	13.815	15.201	18.425
3	6.251	7.815	11.345	12.838	16.266	17.731	21.104
4	7.779	9.488	13.277	14.860	18.466	19.998	23.506
5	9.236	11.070	15.086	16.750	20.515	22.106	25.751
6	10.645	12.592	16.812	18.548	22.457	24.102	27.853
7	12.017	14.067	18.475	20.278	24.321	26.018	29.881
8	13.362	15.507	20.090	21.955	26.124	27.867	31.827
9	14.684	16.919	21.666	23.589	27.877	29.667	33.725
10	15.987	18.307	23.209	25.188	29.588	31.419	35.557
11	17.275	19.675	24.725	26.757	31.264	33.138	37.365
12	18.549	21.026	26.217	28.300	32.909	34.821	39.131
13	19.812	22.362	27.688	29.819	34.527	36.477	40.873
14	21.064	23.685	29.141	31.319	36.124	38.109	42.575
15	22.307	24.996	30.578	32.801	37.698	39.717	44.260
16	23.542	26.296	32.000	34.267	39.252	41.308	45.926
17	24.769	27.587	33.409	35.718	40.791	42.881	47.559
18	25.989	28.869	34.805	37.156	42.312	44.434	49.185
19	27.204	30.144	36.191	38.582	43.819	45.974	50.787
20	28.412	31.410	37.566	39.997	45.314	47.498	52.383
21	29.615	32.671	38.932	41.401	46.796	49.010	53.960
22	30.813	33.924	40.289	42.796	48.268	50.510	55.524
23	32.007	35.172	41.638	44.181	49.728	51.999	57.067
24	33.196	36.415	42.980	45.558	51.179	53.478	58.607
25	34.382	37.652	44.314	46.928	52.619	54.948	60.136
26	35.563	38.885	45.642	48.290	54.051	56.407	61.667
27	36.741	40.113	46.963	49.645	55.475	57.856	63.166
28	37.916	41.337	48.278	50.994	56.892	59.299	64.656
29	39.087	42.557	49.588	52.335	58.301	60.734	66.152
30	40.256	43.773	50.892	53.672	59.702	62.160	67.623
31	41.422	44.985	52.191	55.002	61.098	63.581	69.097
32	42.585	46.194	53.486	56.328	62.487	64.993	70.564
33	43.745	47.400	54.775	57.648	63.869	66.401	72.029
34	44.903	48.602	56.061	58.964	65.247	67.804	73.475
35	46.059	49.802	57.342	60.275	66.619	69.197	74.925
36	47.212	50.998	58.619	61.581	67.985	70.588	76.372
37	48.363	52.192	59.893	62.883	69.348	71.971	77.800
38	49.513	53.384	61.162	64.181	70.704	73.350	79.218
39	50.660	54.572	62.428	65.475	72.055	74.724	80.637
40	51.805	55.758	63.691	66.766	73.403	76.096	82.055
41	52.949	56.942	64.950	68.053	74.744	77.458	83.475
42	54.090	58.124	66.206	69.336	76.084	78.818	84.874

Tabella semi-intervalli per il t di Student

Gradi di libertà	Livello di fiducia			
	0.9	0.95	0.99	0.999
1	6.314	12.706	63.657	636.619
2	2.920	4.303	9.925	31.599
3	2.353	3.182	5.841	12.924
4	2.132	2.776	4.604	8.610
5	2.015	2.571	4.032	6.869
6	1.943	2.447	3.707	5.959
7	1.895	2.365	3.499	5.408
8	1.860	2.306	3.355	5.041
9	1.833	2.262	3.250	4.781
10	1.812	2.228	3.169	4.587
11	1.796	2.201	3.106	4.437
12	1.782	2.179	3.055	4.318
13	1.771	2.160	3.012	4.221
14	1.761	2.145	2.977	4.140
15	1.753	2.131	2.947	4.073
16	1.746	2.120	2.921	4.015
17	1.740	2.110	2.898	3.965
18	1.734	2.101	2.878	3.922
19	1.729	2.093	2.861	3.883
20	1.725	2.086	2.845	3.850
21	1.721	2.080	2.831	3.819
22	1.717	2.074	2.819	3.792
23	1.714	2.069	2.807	3.768
24	1.711	2.064	2.797	3.745
25	1.708	2.060	2.787	3.725
26	1.706	2.056	2.779	3.707
27	1.703	2.052	2.771	3.690
28	1.701	2.048	2.763	3.674
29	1.699	2.045	2.756	3.659
30	1.697	2.042	2.750	3.646
Gauss	1.645	1.960	2.576	3.291

Indice

accelerazione di gravità.....	166
accuratezza	21; 31
ampere	16
analisi dimensionale.....	19
approssimazione gaussiana.....	100
Archimede.....	176
Bayes	59
Bernoulli	59
bilancia.....	169; 207
bilancia “classica” di precisione.....	169
bilancia analitica digitale.....	174
bilancia di torsione.....	184
bilancia idrostatica	176
calendario gregoriano.....	143
calibro a cursore.....	207
Calibro a cursore.....	154
calibro Palmer.....	207
campioni	73; 88
candela	16
Cardano	59
Cavendish.....	184
Čebičev.....	91
chilogrammo	16; 167
coefficiente binomiale	69
coefficiente di correlazione.....	111
combinatoria.....	67
combinazioni	68
consistenza	117
contatore.....	213
correttezza	117
Coulomb.....	184
covarianza.....	109
De Finetti	60
de Moivre	59; 100
definizione classica di probabilità.....	59
definizione frequentista	59
definizione soggettiva di probabilità.....	60
densimetro.....	178
densità di probabilità	87
densità marginali	108
deviazione standard campionaria	39
dimensione fisica	19
dinamometro.....	181
disposizioni	68
disposizioni con ripetizione	68
distorzione	117
distribuzione.....	
binomiale.....	78; 100
del chi quadro.....	104
di Cauchy.....	105
di Gauss.....	96
di Poisson.....	83; 100
gaussiana bivariata.....	113
normale	96
normale standardizzata	97
uniforme.....	101
uniforme continua.....	94
uniforme discreta.....	76
distribuzioni continue.....	94
distribuzioni discrete.....	76
disuguaglianza di Čebičev.....	91
Effetti relativistici.....	148
effetto Doppler.....	161
efficienza	117
error boxes.....	49
errore.....	
casuale	26; 141
del modello.....	27
di lettura.....	24; 141
di quantizzazione	141
di sensibilità.....	21; 25; 141
di taratura.....	27
massimo	48
sistematico	27; 141
errori di misura.....	24
esperimenti controllati	116
esperimenti osservativi	116
fattoriale	67
Fermat	59
Fit lineare generale.....	128
fit polinomiale.....	128
Fluidi reali.....	199
frequenze relative	36
funzione di distribuzione	87
funzione di verosimiglianza.....	132
Galileo.....	11; 59
Galton.....	211
Gauss	59
Gemma Frisius.....	158
gioco del Lotto	70
Giorgi.....	15
Global Positioning System (GPS).....	163

grafici.....	49	Misura della velocità.....	160
gravimetro.....	194	Misura di forze.....	180
gravimetro Lacoste-Romberg.....	195	Misura di masse	166
Guglielmo di Occam	12	misura diretta	13
hertz	16	misura indiretta	13
Hipparcos	159	Misure di frequenza	149
Huygens	11; 59	Misure di intervalli di tempo.....	143
incertezza	30; 141	Misure di lunghezze	151
incertezza assoluta	33	moda	90
incertezza relativa	33	mole	16
incertezza sulle misure indirette	42	momenti.....	91
indipendenza stocastica	108	multipli e sottomultipli delle unità di misura	
inferenza statistica	116	17
International Earth Rotation and		newton	16
Reference Systems Service	147	Newton	11
intervallo di confidenza	118	NIST	142
intervallo di fiducia:	141	Numero di Reynolds.....	202
ipotesi alternativa	136	Nunes, Pedro	154
ipotesi nulla	136	Orologi.....	146
istogramma	36	oscillatore armonico.....	182
istogramma delle frequenze relative	36	pallinometro	211
joule	17	parametro di dispersione	38
Kater, Henry.....	190	parametro di posizione	38
kelvin	16	Pascal	59
Kelvin.....	15	pendolo reversibile.....	190
Kolmogorov	61	permutazioni	67
Laplace	59; 100	permutazioni con ripetizione	68
legge dei grandi numeri	60	picnometro	178
Legge di Poiseuille.....	201	portata	21
legge empirica del caso	60	precisione	21; 31
likelihood	132	principio dei minimi quadrati	124
livello di confidenza	118	principio della massima verosimiglianza ..	132
livello di fiducia	118; 137; 141	principio di equivalenza	189
livello di significatività	137	probabilità condizionata	63
massa	166	Progetto Galileo	164
Matlab	261	prontezza	21
matrice di covarianza	110	prove alla Bernoulli	211
media pesata	74; 132	quinconce di Galton	211
mediana	90	rapporto critico	101
metodo della doppia pesata	172	Resistenza fluidodinamica.....	204
metodo della tara	172	robustezza	117
Metodo della triangolazione.....	158	Ruggero Bacono	11
metro	15; 151	scala logaritmica.....	23
Michell, John	184	scarto	38
Michelson, Albert A.....	152	scarto quadratico medio	39
Micrometro Palmer	156	scatter plot	114
misura	12; 141	secondo	16; 144
misura dell'accelerazione di gravità.....	187	secondo intercalare o leap second	147
Misura della densità.....	176	sensibilità	21

sismometro.....	186	test del χ^2	139
sistema cgs	15	Test di consistenza con un valore teorico	138
Sistema Internazionale	15	Test di consistenza tra due valori	
sistema mks	15	sperimentali.....	138
sistemi di unità di misura	15	test ed esercizi.....	279
stima		test statistici.....	136
dei parametri di una retta sperimentale	124	trasduttori	21
del valor medio	118	valor medio	73; 87
della varianza	121	valor medio di g(x)	87
stima di parametri.....	116	valore aspettato	73; 87
strumenti di misura	21	variabili casuali continue	87
tachimetro	162	variabili casuali discrete.....	72
taratura	21	variabili casuali multiple.....	107
Tempo Atomico.....	147	varianza campionaria	38; 75
tempo siderale.....	148	varianza della binomiale.....	305
Tempo Universale.....	147	varianza della distribuzione	74
teodolite.....	158	Viscosità	199
teorema del limite centrale.....	101		
teoria delle probabilità.....	59		