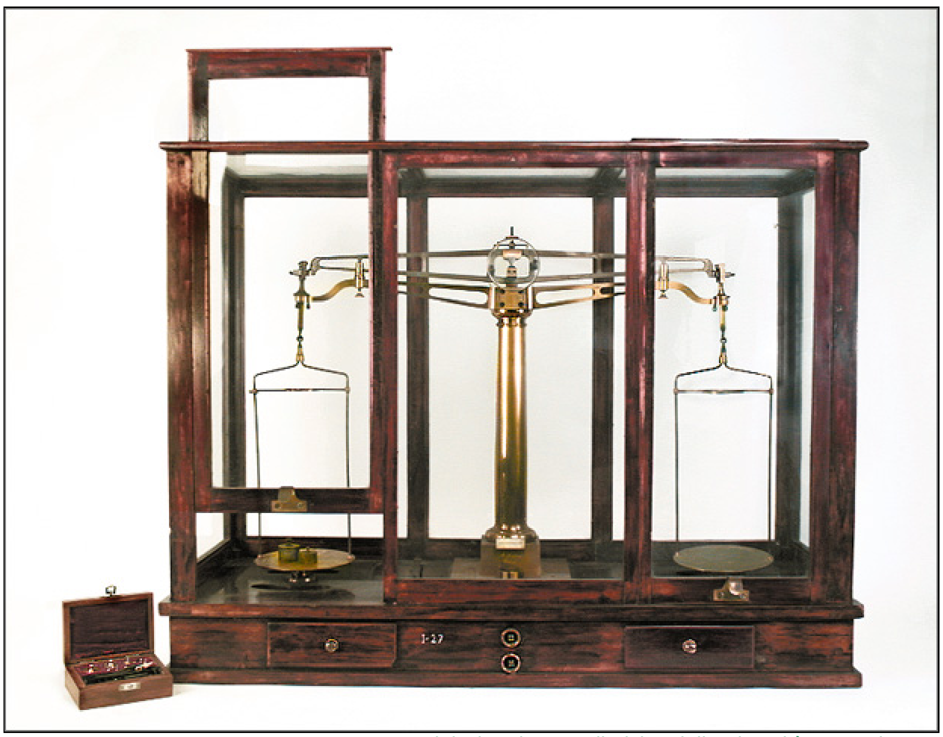
Sergio Frasca

Appunti delle lezioni di
Laboratorio di Strumentazione e Misura

Dipartimento di Fisica
Università di Roma "La Sapienza"



Museo del Dipartimento di Fisica dell'Università La Sapienza

Versione 2 - 14 novembre 2006
Versione aggiornata in http://grwavsf.roma1.infn.it/lsm/materiale/

[Dal Museo del Dipartimento -
http://www.phys.uniroma1.it/DOCS/MUSEO/home.htm**]**

Questa bilancia di ottone, di 2 kg di portata, è conservata in una custodia di legno con cristalli, cassetti per gli accessori e due manopole di controllo per sbloccare e regolare la posizione dei piatti. La base della bilancia è dotata di livella e scala millimetrata. La struttura del giogo, di grande eleganza e funzionalità, è tale da consentire alta rigidità dei bracci e al tempo stesso la loro massima mobilità. Tre viti per lato regolano la posizione dei coltelli rispetto ai piatti.

L' esemplare è forse identificabile con la bilancia di precisione menzionata in "Le scienze e le arti sotto il pontificato di Pio IX", nella presentazione del Museo di Fisica del 1857, e impiegata nelle operazioni di definizione del Sistema dei pesi e misure degli Stati Pontifici.
La sua grande sensibilità (**0,5 mg su 2 kg, pari a 2,5 su 10^7**) consentiva di misurare in laboratorio la variazione dell'accelerazione di gravità con la quota secondo il metodo di von Jolly. A tale scopo il fondo della custodia veniva rimosso, in modo da sospendere al di sotto del piatto di sinistra, con un dislivello h, un piatto ausiliario.

Disposta la bilancia in prossimità del soffitto del laboratorio con il piattello ausiliario in prossimità del pavimento, si carica ciascun piatto con una massa di circa 2 kg in modo da raggiungere l'equilibrio. Si trasferisce poi la massa dal piatto di sinistra sul piatto ausiliario al di sotto. Dalla massa aggiuntiva posta sul piatto di destra per ristabilire l'equilibrio, nota h, si può risalire alla variazione percentuale della forza peso (dell'ordine di 10^{-6}).
La bilancia è riportata nel Registro inventariale del Regio Istituto Fisico con il numero I-27.

(M. Grazia Ianniello)

Per suggerimenti e segnalazione di errori su queste dispense,
mailto:sergio.frasca@roma1.infn.it

Sommario

1 – Introduzione: la misura, base delle scienze sperimentali

- La misura, base delle scienze sperimentali e fondamentale nella tecnica
- Che cosa è una misura
- Modelli e parametri
- Misure dirette e indirette

Si può far risalire a **Roger Bacon**, nel XIII secolo, l'idea dello sviluppo della scienza, in particolare la Fisica, come interazione tra "esperimento" e "matematica". Tale idea fiorì, dopo più di tre secoli, grazie soprattutto a **Galileo Galilei** (1564-1642), **Christiaan Huygens** (1629-1695) e **Isaac Newton** (1642-1727). Da allora la scienza "naturale" si è sviluppata nel continuo confronto tra **esperimenti** e **teoria**, cioè tra "fare misure" ed "interpretare misure".

Ma la misura non è solo importante nel processo di sviluppo della scienza. L'esecuzione di misure è infatti un'attività centrale nella tecnica e nella vita pratica.

Una misura è un numero che viene associato ad una quantità fisica, come la lunghezza, il volume o la massa di un corpo. Un caso particolare di misura è il conteggio, per esempio di un certo numero di oggetti. Col termine "misura" si intende sia la procedura sperimentale usata, sia il risultato: non c'è tuttavia in genere equivoco, dato il contesto in cui il termine è usato.
Ad ogni misura è associata un'**incertezza**, cioè, a parte casi molto particolari[1], ogni misura ha una precisione limitata[2].

Molto spesso la quantità fisica a cui si vuole assegnare una misura è il parametro di un **modello**, non di un oggetto.
Esempio: la lunghezza di un tavolo. In questo caso per parlare di "lunghezza" dobbiamo supporre che il piano del tavolo sia un rettangolo, il che è un'approssimazione; in questo caso il rettangolo è un modello (con due parametri indipendenti che sono per esempio le lunghezze dei due lati). Una migliore approssimazione potrebbe essere un quadrilatero irregolare, che è un modello più complesso, avendo più parametri indipendenti (per esempio le lunghezze dei quattro lati ed un angolo); spingendo ulteriormente l'approssimazione si dovrebbero avere modelli "bitorzoluti" via via più complessi, con un numero crescente di parametri. Se il modello diventa troppo complesso, anche se migliora l'approssimazione con la realtà, diventa praticamente inutile.
Altro esempio: la temperatura di una stanza. In questo caso il modello più semplice è che la temperatura sia la stessa ovunque (modello ad un solo parametro). Migliorando l'approssimazione, si può supporre che la temperatura vari in modo continuo lineare dal pavimento al soffitto (l'aria calda, per la minore densità, tende ad andare verso l'alto) e quindi i parametri del nuovo modello sono due (la temperatura vicino al pavimento e quella vicino al soffitto). Ovviamente possono farsi modelli ben più complessi che tengano conto della

[1] In alcuni casi in cui la misura è un conteggio.
[2] Poiché una teoria si basa su delle misure, nessuna teoria è "vera" se non entro una certa precisione.

presenza di fonti di calore, come per esempio le finestre o le persone. Anche in questo caso un modello troppo complesso (con troppi parametri) può risultare inutile.

Un modello è una semplificazione della realtà. Le leggi della Fisica spesso sono espresse in forma semplificata, per idealizzazioni, cioè modelli. Per esempio un "modello" è il "punto materiale", il "gas perfetto", eccetera.

L'approssimazione necessaria per un modello dipende dalle situazioni. In genere si cerca il modello più semplice per le proprie necessità. È questa una prassi generalizzata in tutta la scienza, sostenuta per la prima volta dal filosofo inglese del trecento **Guglielmo di Occam** (francescano come Roger Bacon) con la sua affermazione *Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem* (Non moltiplicare gli enti se non è necessario) che viene ricordata come il principio del **rasoio di Occam**. Nel nostro caso il termine latino "entia" può tradursi con "parametri".

Le misure di quantità fisiche si dividono in **dirette** ed **indirette**.
Una misura diretta è in genere effettuata con uno strumento di misura. Esempi di strumenti di misura sono il metro a nastro, la bilancia, il voltmetro, lo sfigmomanometro, il misuratore di pressione dei gommisti,…). Talora il compito di un fisico è costruire particolari strumenti di misura.
Una misura indiretta è una misura ottenuta da una o più misure dirette, tramite particolari equazioni. Esempi di misure indirette sono l'area di un quadrato, l'area di un rettangolo, il volume di una sfera, la velocità di una automobile (eseguita non col tachimetro, nel qual caso sarebbe una misura diretta, ma come rapporto tra una data distanza e il tempo impiegato a percorrerla), il numero di molecole in un certo volume di un gas (utilizzando un'opportuna formula basata, per esempio, su misure di volume, temperatura e pressione).

Per assegnare una misura ad una grandezza occorre definire l'**unità di misura**. Vedremo come questo problema sia stato affrontato dalla comunità scientifica.

Spesso ci si riferisce ad insiemi di misure riguardanti un esperimento come i **dati sperimentali**.

2 - Sistemi di unità di misura e dimensioni fisiche

- Sistema Internazionale
- m, s, kg
- Multipli e sottomultipli
- Dimensioni fisiche, analisi dimensionali

Il sistema internazionale

Per misurare una grandezza fisica va prima definita l'unità di misura che si vuole usare. Il valore della misura è quindi il rapporto tra la grandezza fisica in oggetto e l'unità di misura. In passato non solo ogni paese aveva le sue unità di misura, ma all'interno di ogni paese ogni corporazione di artigiani. Per esempio c'erano unità di peso differenti per differenti tipi di merci. Inoltre c'erano più unità di misura dello stesso tipo (per esempio per la lunghezza il pollice, la spanna, il piede, il cubito, lo stadio, il miglio, …) non coordinate tra loro. Una situazione del genere ancora sussiste nei paesi anglosassoni (vedi negli Approfondimenti).
Col nascere della scienza moderna ci si rese conto della necessità di razionalizzare la situazione, ma solo ai tempi della rivoluzione francese furono fatti decisivi passi avanti, con la definizione, da parte dell'Accademia delle Scienze di Parigi, del metro campione e del chilogrammo campione. Solo più tardi furono aggiunte altre unità di base e queste furono adottate ufficialmente da altri paesi.
La comunità scientifica ha promulgato negli ultimi 200 anni vari sistemi coerenti di unità di misura.
Citiamo il sistema **cgs** (basato sul centimetro, il grammo e il secondo), proposto nel 1874 dalla British Association for the Advancement of Science, sotto suggerimento del fisico **Lord Kelvin**. Il cgs è ancora parzialmente usato.
Nel 1901 l'italiano **Giovanni Giorgi**, fisico e ingegnere, propose il sistema **mks** (basato sul metro, il chilogrammo e il secondo), da cui deriva il **Sistema Internazionale** (o **SI**), adottato nell'ottobre del 1960 dall'XI Conferenza Internazionale di Pesi e Misure, tenutasi a Parigi. Questo sistema è ufficialmente in vigore in Italia dal 1 gennaio 1979 (Decreto Legge n. 122 de l4/4/78, in attuazione di una direttiva CEE).

Le unità di base sono così definite:

- **metro (m)**: unità di lunghezza; definito come la lunghezza percorsa nel vuoto da un raggio di luce in 1/299 792 458 di secondo. Inizialmente (1791) era definito come la 40-milionesima parte del meridiano terrestre; in seguito (1889) era stato costruito il metro campione, in una lega di platino-iridio, conservato nei sotterranei del *Bureau International de Poids et Measures* a Sevres.
- **chilogrammo (kg):** unità di massa; definito come la massa del prototipo internazionale di chilogrammo, di platino-iridio come il metro campione, conservato anch'esso presso il *Bureau International de Poids et Measures* a Sevres (1889). Inizialmente era definito come la massa di un decimetro cubo di acqua distillata alla sua massima densità (a 3.98 ºC).

- **secondo (s):** unità di tempo; definito come la durata di 9 192 631 770 periodi della radiazione prodotta dalla transizione tra due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio 133. Originariamente era definito come la 86400-esima parte del giorno solare medio.
- **kelvin (K):** unità di temperatura; è la frazione 1/273.16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua.
- **ampere (A):** unità di corrente elettrica.
- **mole (mol):** unità di quantità di sostanza.
- **candela (cd):** unità di intensità luminosa.

Campioni di chilogrammo e di metro (obsoleto)

A partire dalle unità di base si costruiscono le unità derivate. Per esempio:

- l'**hertz (Hz),** unità di frequenza pari al numero di cicli al secondo (dimensione $\mathbf{s^{-1}}$**)**
- il **newton (N),** unità di forza, definito come la forza che applicata ad un corpo di massa un chilogrammo, produce un'accelerazione di 1 m/s^2 (dimensione $\mathbf{kg \cdot m/s^2}$)
- il **joule (J),** unità di energia e lavoro, definito come il lavoro compiuto dalla forza di 1 N quando il suo punto di applicazione si sposta di 1 m (dimensione $\mathbf{kg \cdot m^2/s^2}$).

Per indicare multipli e sottomultipli delle unità di misura si usano, nel Sistema Internazionale, i seguenti prefissi o simboli.

Fattore	Prefisso	Simbolo
10^{24}	yotta	Y
10^{21}	zetta	Z
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo o chilo	k
10^{2}	etto	h
10^{1}	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	yocto	y

ATTENZIONE: le unità di misura e i prefissi vanno indicati correttamente, non confondendo maiuscole e minuscole. Si noti che:

- le unità che si riferiscono a nomi di persona (come ampere, kelvin, hertz, newton,…) sono scritte in minuscolo, ma le abbreviazioni hanno la prima lettera maiuscola.
- i prefissi superiori al k (10^3) sono tutti maiuscoli, gli altri minuscoli

- l'abbreviazione del secondo è s, non sec.

Nella pratica si usano anche unità di misura che non sono "SI". Sebbene ciò sia in genere da evitare, in certi casi è tollerabile. Per esempio la velocità di un'auto espressa in chilometri/ora (invece che in m/s); o in caso di alcune unità di tempo: talora si usa il minuto o l'anno o il secolo (che è circa 3 Gs). Per la temperatura solo i fisici usano il kelvin, mentre spesso si usa il grado centigrado (indicato con ºC, dal nome dell'astronomo svedese Anders Celsius che lo propose nel 1742) o, negli Stati Uniti, il grado Fahrenheit (indicato con ºF), dal nome del fisico tedesco che lo introdusse nel 1724.

Dimensioni fisiche e analisi dimensionale

Le equazioni della Fisica sono relazioni tra grandezze fisiche (e non semplicemente tra quantità numeriche, come in genere in algebra) e una grandezza fisica è definita non solo da un numero, che indica la misura, ma anche da una **dimensione fisica** (per esempio un tempo, una lunghezza, una velocità). Ovviamente i due termini di un'equazione (a destra e a sinistra del segno di eguale) devono avere sia lo stesso valore numerico, sia la stessa dimensione. Così se in un'espressione compare la somma algebrica di più quantità, esse devono avere la stessa dimensione fisica (si dice anche semplicemente "le stesse dimensioni"): non si possono per esempio sommare una forza e una velocità . Questo fatto è spesso utilizzato per controllare la correttezza delle equazioni (è una specie di semplice "prova del nove": se si trovano discrepanze, l'equazione è sicuramente sbagliata, se non si trovano, può essere corretta).
I prodotti e i rapporti possono invece essere fatti tra elementi di differenti dimensioni (per esempio per avere una velocità si divide una lunghezza per un tempo).
Gli esponenti, se compaiono in una formula, hanno le dimensioni di un numero puro, cioè non hanno dimensioni, ovvero sono adimensionali. Anche gli angoli sono considerati adimensionali.

Ad ogni equazione fisica è quindi associata un'equazione dimensionale. Per esempio prendiamo la seconda legge della dinamica, nel caso di massa costante,

(2.1) $$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

dove $\vec{F}$ è il vettore velocità, $\vec{a}$ il vettore accelerazione e m la massa, associamo l'equazione dimensionale

(2.2) $$[F] = [m] \cdot [a] = [M] \cdot \left[L \cdot T^{-2}\right] = \left[M \cdot L \cdot T^{-2}\right]$$

Le parentesi quadre indicano che si tratta di un'equazione dimensionale; M è la dimensione "massa", L è la dimensione "lunghezza" e T la dimensione "tempo"; si noti che, se ci si limita alla meccanica, le dimensioni alla fine vengono espresse in termini di un prodotto tra le dimensioni L, M e T elevate ad opportune dimensioni:

$$\left[L^a \cdot M^b \cdot T^c \right]$$

Per esempio la velocità ha dimensioni

(2.3) $$[v] = \left[L^1 \cdot M^0 \cdot T^{-1} \right] = \left[L \cdot T^{-1} \right]$$

Per l'energia (e il lavoro)

(2.4) $$[E] = \left[L^2 \cdot M^1 \cdot T^{-2} \right] = \left[L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \right]$$

3 - Strumenti di misura

- Taratura
- Portata, sensibilità, prontezza
- Strumenti analogici e digitali
- Trasduttori

Una misura diretta può farsi tramite il confronto diretto con l'unità di misura o tramite un apposito sistema, più o meno complesso, chiamato strumento di misura tarato.

La **taratura** è la procedura, in genere attuata dal fabbricante, tramite la quale si rende lo strumento in grado di dare misure corrette; esempio: le "tacche" sul righello o su un termometro. Per taluni strumenti questa operazione va ripetuta ogni tanto, mandando lo strumento in laboratori specializzati, o tramite opportune procedure da parte dell'utente o, in caso di alcuni strumenti digitali, tramite una procedura automatica attuata dallo stesso strumento (esempio: talune bilance).

Uno strumento di misura è caratterizzato da alcuni parametri. In particolare:

- La **portata**, cioè l'intervallo dei valori misurabili, per esempio il tachimetro di un'auto può avere una portata di 200 km/ora, un voltmetro da -20 V a +20 V
- La **sensibilità**, espressa come errore di sensibilità o errore di lettura, corrispondente alla minima variazione della grandezza apprezzabile in modo oggettivo
- La **prontezza**, cioè il tempo occorrente per ottenere il valore della misura (eventualmente con una data approssimazione)
- La **precisione** e l'**accuratezza**, di cui parleremo in seguito.

Inoltre, accanto ai classici strumenti cosiddetti "analogici" in cui il risultato viene in genere evidenziato da un indice su una scala graduata, si vanno diffondendo sempre più gli strumenti digitali, in cui il risultato appare direttamente in forma numerica su un display.

Spesso gli strumenti di misura, in particolare quelli digitali, si basano sull'uso di **trasduttori** (o sensori), dispositivi che trasformano una grandezza fisica in un'altra, in genere di tipo elettrico, in modo da poterla elaborare elettronicamente; per esempio una pressione in una differenza di potenziale, una velocità in una corrente, una temperatura in una resistenza).

4 - Errori di misura

- Errore di lettura
- Errori sistematici
- Errori casuali
- Incertezza di una misura
- Rappresentazione di una misura e cifre significative
- Precisione ed accuratezza
- Incertezze assolute e relative

Quando misuriamo una grandezza fisica (o un parametro di un modello), noi supponiamo che essa abbia un "valore vero" **g**. Il risultato della nostra misura sarà un numero **x** in genere diverso da **g**. Poniamo

(4.1)
$$x = g + e$$

e definiamo **e** "errore di misura". **e** è in genere composto dalla somma di tre termini

(4.2)
$$e = e_L + e_S + e_C$$

di natura molto diversa. Essi sono :

$\mathbf{e_L}$ errore di lettura (o di sensibilità), che abbiamo già introdotto nel precedente capitolo

$\mathbf{e_S}$ errore sistematico

$\mathbf{e_C}$ errore casuale

Spesso uno o due di essi sono trascurabili rispetto ai rimanenti.

Abbiamo già introdotto l'**errore di sensibilità** a proposito dei parametri che descrivono uno strumento di misura. Consideriamo due casi:

a) La misura effettuata con uno **strumento graduato**, per esempio la misura di una lunghezza eseguita con un righello, o la misura di una corrente elettrica fatta con un tester analogico. La misura può essere effettuata con una approssimazione dell'ordine dell'intervallo di graduazione della scala di taratura Questa approssimazione può essere vista come un errore aggiuntivo (positivo o negativo), che appunto chiamiamo errore di lettura. Chiamiamo **intervallo di lettura** l'intervallo dei valori della grandezza in misura associato ad una data lettura: **l'errore di lettura è dato dalla metà dell'intervallo di lettura**.

Spesso si identifica l'intervallo di lettura con l'intervallo di graduazione della scala, ma, per essere più corretti, va considerata l'accuratezza dell'operazione di taratura (talvolta riportata nelle specifiche dello strumento) e la difficoltà di stimare soggettivamente la misura (per esempio, per possibili errori di parallasse). Si può quindi avere un errore di lettura superiore alla metà dell'intervallo di graduazione, o anche inferiore ad esso (in pratica però raramente superiore ad un intervallo di graduazione o inferiore a un quarto di esso).

b) La misura effettuata con uno **strumento digitale**. In tal caso l'intervallo di misura ha l'ampiezza di una unità nella cifra meno significativa. Il valore indicato dal display in genere indica il valore centrale dell'intervallo di misura (in qualche caso indica l'estremo inferiore).

Come vedremo più avanti, l'errore di sensibilità è in genere distribuito in modo uniforme nell'intervallo di lettura.

Vediamo ora l'**errore casuale**. Se ripetiamo più volte una misura con uno strumento molto sensibile, spesso succede che otteniamo risultati leggermente differenti. Le cause di questo fenomeno sono molteplici. Per esempio

- cambiamenti delle condizioni sperimentali. Per esempio variazioni di temperatura, piccole differenze nella trazione di un metro a nastro,…
- inadeguatezza del modello. Per esempio nella misura del lato di un cubo, fatta in varie posizioni, se il corpo in esame non è un cubo "abbastanza perfetto" (per rugosità o imprecisione della lavorazione).
- particolari procedure sperimentali. Per esempio, si supponga di voler misurare con un righello da 20 cm la lunghezza di un tavolo di circa tre metri; ciò può essere fatto riportando più volte la lunghezza del righello lungo il bordo del tavolo: la giunzione tra i vari segmenti non sarà perfetta e quindi ripetendo la misura il risultato potrà essere differente.
- disturbi dovuti a cause esterne, per esempio vibrazioni, urti, disturbi elettrici,…
- piccoli errori dell'operatore umano, per esempio in una misura di intervallo di tempo con un cronometro manuale, piccole variazioni nei riflessi dello sperimentatore.
- intrinseca stocasticità del comportamento della materia, sia per ragioni termodinamiche (vedi la teoria cinetica della materia), sia per ragioni quantistiche (vedi il principio d'indeterminazione di Heisenberg).

L'errore casuale può non essere evidenziabile se è inferiore all'errore di lettura.
Se ripetiamo molte volte la misura di una grandezza in una situazione in cui è presente l'errore casuale, abbiamo risultati differenti. In assenza di errori sistematici, questi differenti valori sono sia maggiori che inferiori al valore vero. Se facciamo un istogramma (vedremo come) di questi risultati, troviamo un caratteristico andamento "a campana", centrato intorno al valor medio. Come vedremo più avanti, l'errore casuale è in genere distribuito in modo gaussiano.

Vediamo infine l'**errore sistematico**. Se ripetiamo la misura, esso è in genere sempre lo stesso. Le cause più comuni di errori sistematici sono le seguenti:

- errore di taratura dello strumento di misura. Per esempio un orologio che “va indietro” produce misure di intervalli di tempo più brevi del valore giusto; un righello con le tacche a distanze errate produce ovviamente misure errate. Ovviamente c’è sempre un limite all’accuratezza della taratura di uno strumento e questo viene in genere indicato dal costruttore. Quando non viene indicato altrimenti, in genere è inferiore all’errore di lettura. Per ridurre questo errore va controllata la taratura degli strumenti.
- errore del modello. Per esempio misurare la massa di un corpo con una bilancia trascurando la spinta di Archimede, dovuta all’aria, produce misure inferiori al valor vero. Questo tipo di errore può talvolta ridursi o cancellarsi usando un modello più corretto.
- perturbazione della grandezza da misurare da parte dello strumento di misura. Per esempio, se vogliamo misurare la temperatura dell’acqua calda contenuta in un piccolo recipiente tramite un termometro che inizialmente è a temperatura ambiente, introducendo il termometro nell’acqua la raffreddiamo e quindi il risultato della misura è inferiore al valore corretto. Talvolta questo tipo di errore può calcolarsi e quindi sottrarsi dal valore della misura sottratto.

Abbiamo visto che talvolta l’errore sistematico si può calcolare e sottrarre dal risultato. Uno dei compiti più importanti di un fisico sperimentale è proprio la previsione e la riduzione degli errori sistematici.

La presenza inevitabile degli errori di misura limita la qualità delle misure. Ad ogni misura è quindi associata una grandezza, detta **incertezza**, che ci dà informazione sull’intervallo di valori possibili (o plausibili) per il valore vero. La misura viene quindi espressa come

$$x \pm \Delta x \tag{4.3}$$

seguito dall’unità di misura, intendendo che il valore vero della misura sia compreso (plausibilmente) nell’intervallo **x - Δx** e **x + Δx** . **x** è il **valore** della misura e **Δx** è l’**incertezza**. Talvolta (di rado) si indicano intervalli di misura “asimmetrici”, come

$$x^{+\Delta x 2}_{-\Delta x 1} \tag{4.4}$$

L’incertezza non è in genere nota con alta precisione (in genere a circa il 10 %), e viene in genere espressa con una o due cifre significative.

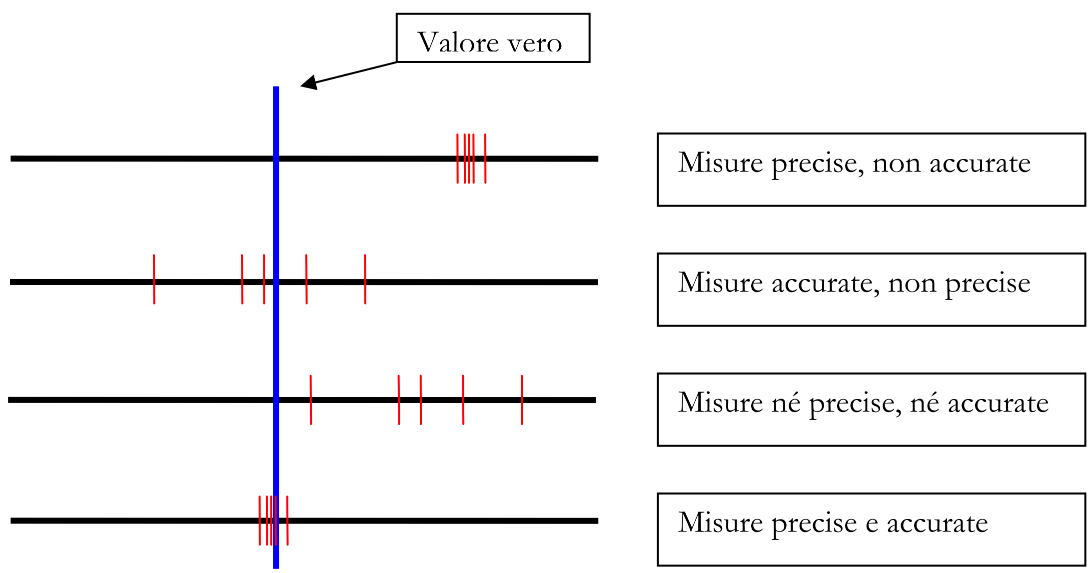
Suggerimento per il numero di cifre significative dell'incertezza: usare due cifre significative se la prima cifra è bassa, per esempio minore di 4, altrimenti usarne una. Perché ? Consideriamo le seguenti misure, a due a due con valori successivi di incertezza:

10.0±0.1   10.0±0.2   10.0±0.8   10.0±0.9 ; 10.00±0.14   10.00±0.15 10.00±0.89 10.00±0.90

Le prime quattro hanno incertezze espresse con una sola cifra significativa; tra la prima e la seconda il valore dell'incertezza raddoppia, tra la terza e la quarta la variazione è di circa il 12 %. Le seconde quattro hanno incertezze espresse con due cifre significative, tra la quinta e la sesta la variazione è di circa il 7 %, mentre tra le ultime due è circa l' 1 %. Come si vede sulle prime due misure la precisione sull'incertezza è troppo scarsa, mentre per le ultime due è troppo elevata. Da qui il suggerimento.

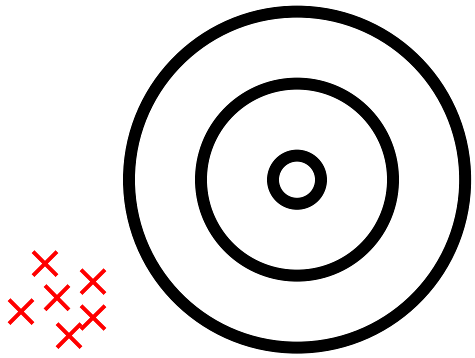
Una volta stabilita l'incertezza, il valore della misura va espressa con un numero di cifre significative coerente con l'incertezza, per esempio **347.234±0.023, 271±6, 5270±150** (**non** per es. 574.358±2.1 o 75.3±0.005 che vanno scritte **574.4±2.1 e 75.300±0.005**). Ovviamente con la corretta unità di misura.

Per descrivere la bontà di una misura rispetto agli errori sistematici e casuali si utilizzano rispettivamente i termini **accuratezza** (o anche giustezza) e **precisione** che avevamo introdotto tra le caratteristiche di uno strumento di misura. Queste due qualità sono indipendenti: si possono avere misure molto accurate e poco precise o misure poco accurate e molto precise. Le varie situazioni sono illustrate nella figura seguente:

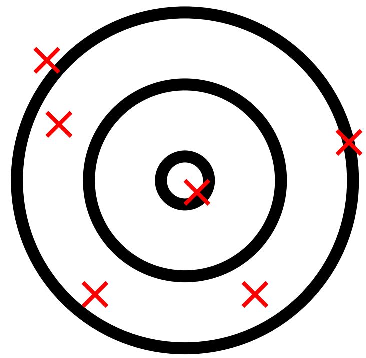


Per chiarire i due concetti di accuratezza e precisione, mostriamo i due bersagli colpiti da un tiratore preciso, ma non accurato e da un tiratore accurato, ma non preciso:

Tiratore preciso, ma non accurato
- piccoli errori casuali
- grandi errori sistematici



Tiratore accurato, ma non preciso
- piccoli errori sistematici
- grandi errori casuali



È evidente che al tiratore preciso, ma non accurato basta sistemare un po' meglio il mirino e diventa anche "accurato".

Riepilogando:

- **errore di lettura** → **sensibilità**
- **errore casuale** → **precisione**
- **errore sistematico** → **accuratezza**

Accanto all'incertezza di una misura, detta anche **incertezza assoluta**, si introduce anche l'**incertezza relativa**, data dal rapporto tra l'incertezza e il valore più probabile della misura

(4.5)
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{|x|}$$

L'incertezza relativa è un numero puro, in genere molto minore di 1 e talvolta si esprime come percentuale. Le più precise misure fisiche note hanno un'incertezza relativa (o, come si dice più semplicemente, una precisione) dell'ordine di 10^{-12} (tramite la spettroscopia Mössbauer). Le normali misure che si fanno in laboratorio hanno in genere precisioni non migliori di 0.001 (cioè 0.1 %), a parte misure di tempo e frequenza che sono in genere migliori.

Un esempio

Supponiamo di fare una misura della lunghezza di un tavolo con un righello. Sia 4 metri esatti il "valore vero" della lunghezza. Sia il righello lungo 20 cm, con divisioni ogni millimetro; inoltre sia "starato", cioè il costruttore lo ha fatto 1/30 più corto di quanto sarebbe dovuto essere, ma ciò è ignoto allo sperimentatore. Leggiamo i valori misurati al millimetro.

Facciamo 50 misure. Ecco di seguito la situazione. Sono riportati nelle 7 colonne

a) il numero d'ordine della misura
b) il valore vero (4 m)
c) l'errore sistematico (4/30 m)
d) l'errore casuale, dovuto al non perfetto allineamento e giustapposizione del righello
e) il valore che misurerei se la sensibilità del righello fosse 10000 volte migliore (b+c+d)
f) risultato effettivo della misura (con l'errore di lettura
g) errore di lettura o di sensibilità (e-f)

Misura della lunghezza del tavolo con righello starato

N	Valore vero	Errore sistematico	Errore casuale	Valore con errore	Risultato misura	Errore di lettura
1	4	0.133333333	-0.00346052	4.1298728	4.130	-0.0001272
2	4	0.133333333	-0.01332468	4.1200087	4.120	0.0000087
3	4	0.133333333	0.00100266	4.1343360	4.134	0.0003360
4	4	0.133333333	0.00230141	4.1356347	4.136	-0.0003653
5	4	0.133333333	-0.00917177	4.1241616	4.124	0.0001616
6	4	0.133333333	0.00952732	4.1428607	4.143	-0.0001393
7	4	0.133333333	0.00951331	4.1428466	4.143	-0.0001534
8	4	0.133333333	-0.00030107	4.1330323	4.133	0.0000323
9	4	0.133333333	0.00261834	4.1359517	4.136	-0.0000483
10	4	0.133333333	0.00139711	4.1347304	4.135	-0.0002696
11	4	0.133333333	-0.00149367	4.1318397	4.132	-0.0001603
12	4	0.133333333	0.00580632	4.1391397	4.139	0.0001397
13	4	0.133333333	-0.00470653	4.1286268	4.129	-0.0003732
14	4	0.133333333	0.01746549	4.1507988	4.151	-0.0002012
15	4	0.133333333	-0.00109117	4.1322422	4.132	0.0002422
16	4	0.133333333	0.00091145	4.1342448	4.134	0.0002448

17	4	0.133333333	0.00853415	4.1418675	4.142	-0.0001325
18	4	0.133333333	0.00047425	4.1338076	4.134	-0.0001924
19	4	0.133333333	-0.00076519	4.1325681	4.133	-0.0004319
20	4	0.133333333	-0.00665880	4.1266745	4.127	-0.0003255
21	4	0.133333333	0.00235529	4.1356886	4.136	-0.0003114
22	4	0.133333333	-0.01068945	4.1226439	4.123	-0.0003561
23	4	0.133333333	0.00571460	4.1390479	4.139	0.0000479
24	4	0.133333333	0.01298850	4.1463218	4.146	0.0003218
25	4	0.133333333	-0.00553421	4.1277991	4.128	-0.0002009
26	4	0.133333333	0.00686397	4.1401973	4.140	0.0001973
27	4	0.133333333	0.01003201	4.1433653	4.143	0.0003653
28	4	0.133333333	-0.01274984	4.1205835	4.121	-0.0004165
29	4	0.133333333	-0.01152772	4.1218056	4.122	-0.0001944
30	4	0.133333333	0.00456918	4.1379025	4.138	-0.0000975
31	4	0.133333333	-0.00319908	4.1301342	4.130	0.0001342
32	4	0.133333333	0.00551998	4.1388533	4.139	-0.0001467
33	4	0.133333333	0.00652498	4.1398583	4.140	-0.0001417
34	4	0.133333333	0.00569527	4.1390286	4.139	0.0000286
35	4	0.133333333	0.01032200	4.1436553	4.144	-0.0003447
36	4	0.133333333	0.00534880	4.1386821	4.139	-0.0003179
37	4	0.133333333	0.00952670	4.1428600	4.143	-0.0001400
38	4	0.133333333	-0.00961966	4.1237137	4.124	-0.0002863
39	4	0.133333333	-0.00015832	4.1331750	4.133	0.0001750
40	4	0.133333333	-0.00125374	4.1320796	4.132	0.0000796
41	4	0.133333333	-0.01283268	4.1205006	4.121	-0.0004994
42	4	0.133333333	0.00205843	4.1353918	4.135	0.0003918
43	4	0.133333333	-0.00845178	4.1248815	4.125	-0.0001185
44	4	0.133333333	0.01132113	4.1446545	4.145	-0.0003455
45	4	0.133333333	-0.00644072	4.1268926	4.127	-0.0001074
46	4	0.133333333	0.00422994	4.1375633	4.138	-0.0004367
47	4	0.133333333	0.00175457	4.1350879	4.135	0.0000879
48	4	0.133333333	-0.00737521	4.1259581	4.126	-0.0000419
49	4	0.133333333	-0.01736540	4.1159679	4.116	-0.0000321
50	4	0.133333333	-0.00047350	4.1328598	4.133	-0.0001402
Media	**4**	**0.133333333**	**0.0003146**	**4.1336480**	**4.13374**	**-0.0000920**
Dev.St.	**0**	**0**	**0.0078078**	**0.0078078**	**0.007769**	**0.0002315**

In fondo sono calcolate, per ogni colonna, la media aritmetica e la deviazione standard (che, come vedremo, è un indice dello sparpagliamento delle misure).

Notiamo che la media degli errori casuali è molto minore del valore assoluto medio di tali errori e lo stesso può dirsi per gli errori di lettura.

Se non ci fosse l'errore casuale, l'errore di lettura sarebbe sempre lo stesso e quindi facendone la media rimarrebbe se stesso. Quindi, paradossalmente, la presenza dell'errore casuale può ridurre l'effetto dell'errore di lettura.

Come vedremo, in questo caso possiamo valutare l'incertezza sulla media come 0.0011 m .

La misura può essere espressa come

4.1337±0.0011 m

che non è corretta, perché c'è l'errore sistematico (ignoto e quindi non correggibile). Se il righello fosse "accurato", misureremmo 0.13333 m in meno, e avremmo

4.0004±0.0011 m

5 - Rappresentazione di insiemi di misure

- Istogrammi di misure
- Media
- Deviazione standard
- Calcolo di media e varianza da istogrammi
- Calcolo di media e varianza con tre voci di memoria

Supponiamo di ripetere più volte la misura di una certa grandezza fisica **g**. Otteniamo un insieme di valori (le "misure" o "dati sperimentali")

$$\mathbf{x_1, x_2, \ldots , x_n}$$

Un primo modo di rappresentare questi risultati è tramite dei punti sulla retta, rappresentanti i valori di g:

L'istogramma

Un modo più suggestivo e molto usato, se il numero dei dati è abbastanza grande (almeno una decina) è l'**istogramma** (o **istogramma delle frequenze**). Per realizzarlo occorre prima definire l'intervallo di interesse $\{\mathbf{g_{min}, g_{max}}\}$ (per esempio l'intervallo tra il dato minimo e il massimo). Dividiamo quindi tale intervallo in un certo numero **m** di sotto-intervalli (in inglese "bin"). Infine contiamo quanti dati ci sono in ogni bin, indicando gli m risultati con

$$\mathbf{h_1, h_2, \ldots , h_m}$$

Questi valori, detti "frequenze", possono essere graficati in vari modi, per esempio con un grafico a sbarre.
Si noti che per fare un istogramma vanno definiti (cioè scelti) i tre valori $\mathbf{g_{min}, g_{max}}$ e **m**: l'aspetto (e l'utilità) dell'istogramma dipendono da questa scelta. È buona norma, per esempio, che m sia molto minore di n, ma non troppo piccolo. Infatti se è troppo grande, ci saranno molti bin vuoti e quelli "colpiti" conterranno pochissimi dati (e quindi con forti "fluttuazioni", come vedremo in seguito); viceversa se i bin "efficaci" (cioè non vuoti) sono troppo pochi, si perderanno informazioni sull'andamento delle frequenze.

Talvolta si rappresentano le **frequenze relative**, cioè i valori $\mathbf{h_i}$ divisi per **n**, ottenendo l'**istogramma delle frequenze relative**; tali valori indicano la frazione dei dati (spesso indicata come percentuale) che cade in ciascun bin.

Talvolta l'istogramma delle frequenze relative viene rappresentato con un diagramma a torta, cioè un cerchio in cui i vari bin sono rappresentati da settori circolari di area proporzionale alla frequenza relativa di quel bin.

Può capitare di istogrammare numeri discreti (per esempio numeri interi, come per esempio i risultati di lanci di dadi). In tal caso i bin "naturali" (e spesso preferibili) sono definiti dalla discretizzazione dei dati (per esempio, nel caso dei dadi, i numeri da 1 a 6).

In un istogramma non c'è tutta l'informazione di un insieme di misure. Per esempio da un istogramma fatto con certi bin non possono ottenersi istogrammi con un altro insieme di bin (a parte casi particolari), in particolare con larghezza inferiore. Inoltre in un istogramma si perde l'ordine temporale delle misure, che è presente nelle misure originarie se sono riportate nell'ordine in cui sono state effettuate. È buona norma, quando si hanno misure successive di una grandezza che si sospetta possa essere variata tra le prime e le ultime misure, osservare il diagramma temporale delle misure effettuate: ovviamente questa informazione non è ricavabile dall'istogramma.

Nel presente corso assumiamo che le grandezze in misura non varino sensibilmente durante il periodo di osservazione. Se questo assunto non è verificato, occorre l'uso di tecniche più avanzate, sviluppate nell'ambito della teoria dei segnali. Si noti che potrebbe essere proprio la variazione della grandezza in misura la cosa più interessante in un esperimento. Vanno quindi individuate le caratteristiche di questa variazione, come per esempio la scala temporale di variazione, la presenza di periodicità o la correlazione con altre grandezze che variano per cause note.

Parametri di posizione e di dispersione: la media e la deviazione standard

Molto spesso gli istogrammi di misure ripetute mostrano un andamento a campana in cui le caratteristiche salienti sono la **posizione** del massimo della campana e un parametro che ci indichi la sua **larghezza**, cioè possiamo sintetizzare l'insieme delle nostre misure con due numeri: un parametro di posizione e un parametro di larghezza (o dispersione). Il primo ci dà il valore più plausibile della misura, mentre il secondo può indicare l'incertezza sulla singola misura.
Il modo più ovvio di ottenere il parametro di posizione è fare la media aritmetica dei dati

(5.1) $$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

tuttavia ci sono altri metodi che in certi casi possono essere preferibili, per esempio

(5.2) $$\overline{x}' = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}$$

oppure, dopo aver ordinato le n misure in ordine crescente,

(5.3)
$$\bar{x}" = \begin{cases} x_{(n+1)/2} & \text{se n è dispari} \\ \dfrac{x_{n/2} + x_{n/2+1}}{2} & \text{se n è pari} \end{cases}$$

Il parametro posizionale ottenuto con quest'ultima procedura viene chiamato "**mediana**".

Discuteremo del parametro di posizione con maggiori dettagli più avanti nel corso.

Per definire il parametro di dispersione, consideriamo gli "scarti"

(5.4)
$$\xi_i = x_i - \bar{x}$$

Si potrebbe quindi pensare che una ragionevole definizione della dispersione sia la media degli scarti. È facile vedere che non è così, infatti

(5.5)
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

ciò perché gli scarti sono positivi e negativi e, facendone la somma, si cancellano esattamente tra di loro. Si potrebbe però definire il parametro di dispersione come la media di valori assoluti degli scarti e la cosa funzionerebbe. Tuttavia, per ragioni che vedremo in seguito, si preferisce introdurre la **varianza** (più correttamente "**varianza campionaria**")

(5.6)
$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

e quindi si definisce il parametro di dispersione **σ** come la radice quadrata della varianza; tale parametro viene chiamato **scarto quadratico medio** o **deviazione standard** (in Inglese "standard deviation") "**campionaria**", cioè ricavata dai dati sperimentali.

Sviluppiamo la formula precedente

(5.7)
$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i + n\bar{x}^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}^2$$

Si noti che l'ultimo sviluppo indica un modo per calcolare media e varianza con solo tre voci di memoria, come è fatto per esempio nelle calcolatrici tascabili. Il metodo usa tre voci di memoria che chiamiamo **S**, **Q** e **N**, ed è il seguente:

- al primo dato immesso $\mathbf{x_1}$ poniamo $\mathbf{S=x_1}$, $\mathbf{Q=(x_1)^2}$, $\mathbf{N=1}$
- al dato immesso i-esimo $\mathbf{x_i}$, poniamo $\mathbf{S=S+x_i}$, $\mathbf{Q=Q+(x_i)^2}$, $\mathbf{N=i}$
- dopo aver immesso n dati, possiamo calcolare media e varianza con

(5.8)
$$\bar{x} = \frac{S}{N}$$

(5.9)
$$\sigma^2 = \frac{Q}{N} - \left(\frac{S}{N}\right)^2$$

La media e la deviazione standard si ottengono partendo dai dati $\{\mathbf{x_i}\}$. Possiamo tuttavia calcolarle a partire dall'istogramma (eventualmente anche dall'istogramma delle frequenze relative), ottenendo risultati che possono essere leggermente differenti. Partendo dagli **m** valori $\{\mathbf{h_i}\}$ dell'istogramma, calcolati in bin centrati agli m valori $\{\mathbf{b_i}\}$, le formule sono le seguenti:

(5.10)
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} b_i \cdot h_i}{\sum_{i=1}^{m} h_i}$$

(5.11)
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} h_i (b_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{m} h_i}}$$

L'idea è la seguente: approssimiamo i dati che capitano all'interno di un bin con il valore centrale del bin $\mathbf{b_i}$; quindi, usando la proprietà commutativa, raccogliamo insieme gli $\mathbf{h_i}$ dati di uno stesso bin e usiamo le stesse definizioni precedenti.

Trasformazioni lineari per media e deviazione standard campionarie

Se ad un insieme di numeri che hanno un media $\overline{x}$ e una deviazione standard σ aggiungiamo una costante k, quale è la nuova media e la nuova deviazione standard ?
Sostituendo nelle formule per media e d.s. $\mathbf{x_i+k}$ al posto di $\mathbf{x_i}$, troviamo facilmente che i nuovi parametri sono

(5.12) $$\overline{x}' = \overline{x} + k \qquad \sigma' = \sigma$$

cioè, la nuova media viene semplicemente aumentata del valore k e la nuova deviazione standard rimane la stessa.

Analogamente, se moltiplichiamo un insieme di numeri che hanno un media $\overline{x}$ e una deviazione standard σ^2 per una costante k, quale è la nuova media e la nuova deviazione standard ?
Sostituendo nelle formule per media e deviazione standard $\mathbf{k\ x_i}$ al posto di $\mathbf{x_i}$, troviamo facilmente che i nuovi parametri sono

(5.13) $$\overline{x}' = k \cdot \overline{x} \qquad \sigma' = k \cdot \sigma$$

cioè, sia la nuova medi a, che la nuova deviazione standard risultano pari ai valori di $\overline{x}$ e σ moltiplicati per k. Ovviamente la nuova varianza sarà pari al valore originario moltiplicato per k^2.

Queste proprietà giustificano la nostra scelta di prendere come parametri di posizione e sparpagliamento rispettivamente la media aritmetica e la deviazione standard.

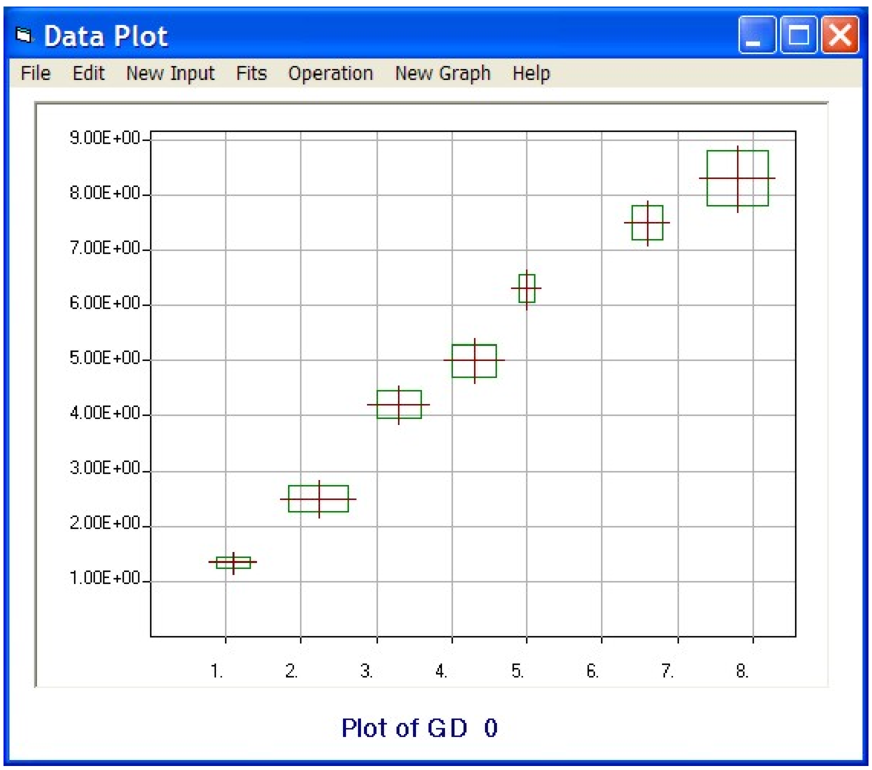
6 - Grafici

- Incertezze nei grafici
- Grafici semi-logaritmici
- Grafici doppio-logaritmici

Spesso si eseguono misure diverse di una grandezza fisica al variare di un parametro. I dati in genere si rappresentano con un grafico con i valori del parametro (per esempio **x**) sulle ascisse e quelli delle misure della grandezza in esame (per esempio **y**) sulle ordinate. È fondamentale riportare sugli assi le grandezze che sono rappresentate e le unità di misura.

Incertezze nei grafici

Le incertezze sulle misure del parametro e della grandezza sono rappresentate riportando (in vari possibili modi) gli intervalli di incertezza ("error boxes" in Inglese). Vedi per esempio:



Grafici semi-logaritmici

Talora nel fare i grafici è conveniente l'uso di una scala logaritmica per uno dei due assi, cioè si grafica il logaritmo della grandezza in funzione del parametro o la grandezza in funzione del logaritmo del parametro. Ciò può offrire vantaggi nei seguenti casi:

- Siamo interessati ad osservare le variazioni della grandezza in esame al variare del parametro in modo percentuale. Un tipico parametro che spesso viene rappresentato sulle ascisse in modo logaritmico è la frequenza.
- Le variazioni della grandezza per taluni valori del parametro sono molto più grandi che per altri: una rappresentazione con ordinata lineare ridurrebbe praticamente a 0 i valori piccoli, mentre usando un'ordinata logaritmica possiamo apprezzare le variazioni su tutte le scale.
- L'andamento della grandezza rispetto al parametro è esponenziale del tipo $y = a \cdot e^{k \cdot x}$ dove **a** e **k** sono numeri reali. Prendendo $Y = \log y$ e $A = \log a$, abbiamo

  (6.1) $$Y = \log(a \cdot e^{k \cdot x}) = A + k \cdot x$$

  e l'andamento esponenziale diventa lineare, e dai coefficienti della retta sono facilmente ricavabili i parametri dell'andamento esponenziale.

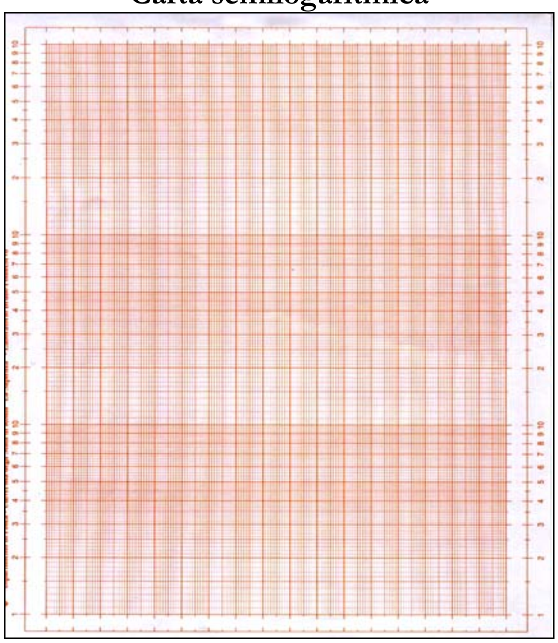
- L'andamento della grandezza rispetto al parametro è logaritmico del tipo $y = a \cdot \log(k \cdot x)$. Possiamo sviluppare $\log(k \cdot x) = \log k + \log x$. Se prendiamo $X = \log x$ e $K = a \cdot \log k$, abbiamo

(6.1) $$y = K + a \cdot X$$

  e quindi anche in questo caso abbiamo un andamento lineare, facilmente verificabile e di cui è facile, dal grafico, calcolare i parametri.

In questi casi è spesso comodo l'uso di una carta speciale detta carta millimetrata semi-logaritmica in cui uno degli assi (in genere quello "lungo") è "grigliato" in modo logaritmico. Caratteristica importante è il numero di "decadi" che sono riportate sull'asse logaritmico.

Carta semilogaritmica



Grafici doppio-logaritmici

In altri casi è comodo graficare il logaritmo della grandezza in funzione del logaritmo del parametro. Ciò è particolarmente comodo nel caso in cui il legame funzionale tra grandezza e parametro è del tipo $y = a \cdot x^k$, dove **a** è un numero reale positivo e **k** un numero reale qualsiasi. Infatti in tal caso, prendendo il logaritmo dei due termini, abbiamo

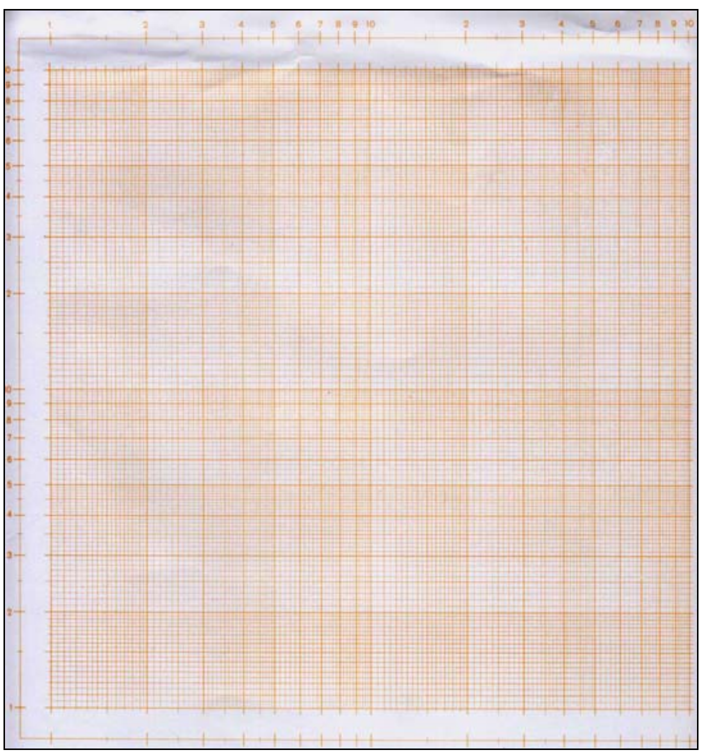
(6.2) $$Y = \log y, \quad X = \log x \quad \text{e} \quad A = \log a$$

e quindi

(6.3) $$Y = \log(a \cdot x^k) = \log a + k \cdot \log x = A + k \cdot X$$

e quindi un andamento con legge di potenza k diventa un andamento lineare con pendenza k. Per semplificare questo tipo di grafici si può utilizzare la carta doppio-logaritmica.

Carta doppio-logaritmica



Quando si usa una carta logaritmica, la prima cosa da fare è l'"assegnazione delle decadi", cioè stabilire quale potenza del 10 è rappresentata in ciascuna decade.

7 - Incertezza sulle misure indirette

- Propagazione delle incertezze nel caso di relazione lineare per una variabile
- Propagazione delle incertezze in generale per una variabile (derivate)
- Propagazione delle incertezze per più variabili (derivate parziali)

Misure indirette da una singola variabile

Ci occuperemo ora di come si può calcolare l'incertezza sulle misure indirette. Supponiamo che la misura indiretta **y** si ricavi dalla misura diretta **x** tramite l'espressione

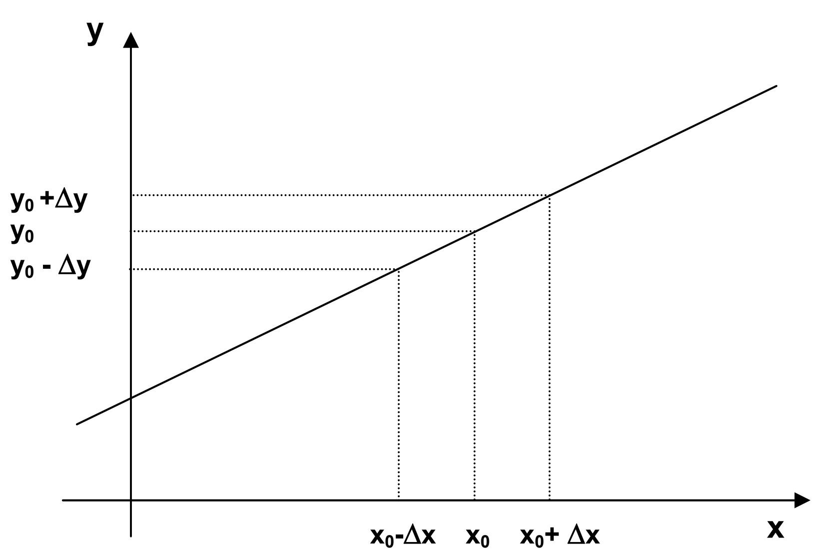
(7.1) $$y = m \cdot x + q$$

È facile vedere che, se la misura diretta è $\mathbf{x_0 \pm \Delta x}$, il valore della misura indiretta è

(7.2) $$y_0 = m \cdot x_0 + q$$

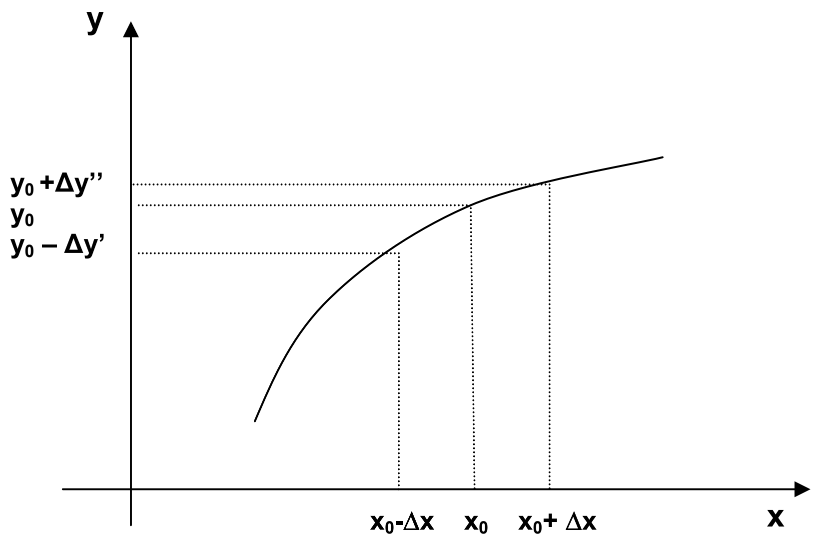
e l'incertezza su di essa è

(7.3) $$\Delta y = |m| \cdot \Delta x$$



In generale, se la misura indiretta **y** si ottiene come **y = f(x)** , essendo $\mathbf{x_0}$ il valore della misura e $\mathbf{\Delta x}$ l'incertezza, allora l'intervallo $\mathbf{(x_0-\Delta x,\ x_0+\Delta x)}$ si "trasforma" nell'intervallo $\mathbf{(y_0-\Delta y',\ y_0+\Delta y'')}$ dove

(7.4) $$y_0 - \Delta y' = f\left(x_0 - \Delta x\right) \quad \text{e} \quad y_0 + \Delta y'' = f\left(x_0 + \Delta x\right)$$



Poiché $\mathbf{y_0 = f(x_0)}$**,** possiamo scrivere

(7.5) $$\Delta y' = f\left(x_0\right) - f\left(x_0 - \Delta x\right) \quad \text{e} \quad \Delta y'' = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$$

ricordando che la derivata di f(x) (se la funzione f(x) non è "strana") è definita come

(7.6) $$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x) - f(x-dx)}{dx}$$

Essa rappresenta il coefficiente angolare della tangente alla curva f(x) nel punto x.
Se $\mathbf{\Delta x}$ è abbastanza piccolo, la curva nell'intervallo $\mathbf{(x_0-\Delta x.\ x_0+\Delta x)}$ può essere approssimata dalla tangente (si fa cioè un'approssimazione al primo ordine o lineare) e si ha

(7.7) $$\Delta y' \approx \Delta y'' \approx \left| f'(x_0) \right| \cdot \Delta x$$

possiamo porre perciò

(7.8) $$\Delta y = \left| f'(x_0) \right| \cdot \Delta x$$

che è quindi la formula generale per la propagazione delle incertezze quando la misura indiretta deriva da una sola misura diretta. Possiamo quindi scrivere la misura indiretta come $\mathbf{y_0 \pm \Delta y}$ **.**

Un caso particolare e particolarmente interessante è quello in cui una misura si ricava da un'altra tramite l'espressione

(7.9) $$y = a \cdot x^k$$

in tal caso, se il valore di **x** è $\mathbf{x_0 \pm \Delta x}$, abbiamo

(7.10) $$y_0 = a \cdot x_0^k$$

(7.11) $$\Delta y = \left| k \cdot a \cdot x_0^{k-1} \right| \cdot \Delta x$$

Vediamo ora cosa accade, in questo caso particolare, all'incertezza relativa $\varepsilon_y = \frac{\Delta y}{|y|}$**,**

essendo nota $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{|x|}$**.**

Si ha

(7.12) $$\left| \frac{\Delta y}{y_0} \right| = \left| \frac{kax_0^{k-1}}{ax_0^k} \right| \Delta x = \left| k \frac{\Delta x}{x_0} \right|$$

Questo semplicissimo risultato è molto comodo da usarsi in pratica.

Si noti che l'incertezza su **y** in genere varia al variare di **x**, anche se $\mathbf{\Delta x}$ è costante (al variare di **x**) (a meno che il legame tra **x** e **y** sia lineare).

Esempio: Supponiamo di conoscere il raggio **r** di un cerchio con l'incertezza $\mathbf{\Delta r}$. Quale è l'incertezza assoluta sull'area del cerchio ? e l'incertezza relativa ?
L'area è $A = \pi \cdot r^2$, quindi, essendo la derivata di A rispetto a r pari a $2\pi \cdot r$,

(7.13) $$\Delta A = 2\pi \cdot r \cdot \Delta r$$

Per l'incertezza relativa, essendo $\varepsilon_r = \frac{\Delta r}{r}$, si ha

(7.14) $$\varepsilon_A = \frac{\Delta A}{A} = 2 \cdot \varepsilon_r$$

Misure indirette da più variabili

Consideriamo ora il caso in cui si ricavi una misura a partire da n diverse misure, tra loro indipendenti (vedremo in seguito cosa ciò significhi e cosa accada se questa ipotesi non è verificata). Sia

(7.15) $$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

e le incertezze sulle varie x_i pari relativamente a Δx_i. Abbiamo

(7.16) $$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 \Delta x_i^2}$$

dove con $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ indichiamo la **derivata parziale** di **f** rispetto a $\mathbf{x_i}$. Ricordiamo che la derivata parziale di una funzione rispetto a una variabile è calcolata come la derivata "semplice", considerando le altre variabili come costanti.

Esempio: Si abbia un parallelepipedo di lati $\mathbf{a \pm \Delta a}$, $\mathbf{b \pm \Delta b}$, $\mathbf{c \pm \Delta c}$. Si voglia calcolarne il volume con la relativa incertezza.
Il volume è dato da

(7.17) $$V = a \cdot b \cdot c$$

poiché

$$\frac{\partial(a \cdot b \cdot c)}{\partial a} = b \cdot c \qquad \frac{\partial(a \cdot b \cdot c)}{\partial b} = a \cdot c \qquad \frac{\partial(a \cdot b \cdot c)}{\partial c} = a \cdot b$$

l’incertezza è

(7.18) $$\Delta V = \sqrt{(b \cdot c \cdot \Delta a)^2 + (a \cdot c \cdot \Delta b)^2 + (a \cdot b \cdot \Delta c)^2}$$

Supponiamo ora che sia $\mathbf{a = b = c}$, cioè sia il parallelepipedo un cubo, e $\mathbf{\Delta a = \Delta b = \Delta c}$, cioè siano le incertezze uguali. Se non ci fidiamo che sia un cubo ed eseguiamo le tre misure dei tre lati, abbiamo

(7.19) $$\Delta V = \sqrt{3} \cdot a^2 \cdot \Delta a$$

Se invece ci fidiamo che sia un cubo perfetto e quindi misuriamo solo un lato, usiamo l'espressione $\mathbf{V = a^3}$ e quindi l'incertezza è

(7.20) $$\Delta V = 3a^2 \Delta a$$

Si noti che il motivo della differenza è dovuta al fatto che nel primo caso è come se avessimo fatto la media di 3 misure indipendenti, e quindi abbiamo un risultato un po' migliore.

Il caso del rapporto: Vediamo cosa accade nel caso in cui la misura indiretta deriva dal rapporto di due altre misure. Facciamo per esempio il caso del calcolo della densità, data dal rapporto tra massa e volume di un corpo. Siano il volume $\mathbf{V \pm \Delta V}$ e la massa $\mathbf{m \pm \Delta m}$. Si ha per la densità

(7.21) $$\rho = \frac{m}{V}$$

(7.22) $$\Delta \rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m} \Delta m \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial V} \Delta V \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{V} \right)^2 + \left(-\frac{m \cdot \Delta V}{V^2} \right)^2}$$

Altro esempio: Un caso particolare di misura indiretta basata su più misure è quello in cui la $\mathbf{f}$ è semplicemente la somma delle variabili $\mathbf{x_i}$

(7.23) $$y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

poiché le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sono in questo caso tutte pari a 1, per l'incertezza su $\mathbf{y}$ si ha

(7.24) $$\Delta y = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}$$

Si noti che questa formula può essere vista come una generalizzazione del teorema di Pitagora, cioè l'espressione della diagonale massima di un parallelepipedo in n dimensioni, e dà un valore che è sempre inferiore alla somma dei lati. Giustificheremo in seguito questa espressione; per ora basti pensare che è dovuta al fatto che gli errori casuali sono sia positivi che negativi e quindi nella somma si cancellano parzialmente tra di loro.
Se le Δx_i sono tutte eguali tra di loro,

(7.25) $$\Delta y = \Delta x \cdot \sqrt{n}$$

Il caso della media: questo è un caso particolarmente interessante, perché è ciò che si fa quando abbiamo più misure ripetute, e in tal caso in genere le incertezze sono tutte eguali. Si ha

(7.26) $$y = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \overline{x}$$

le derivate parziali sono $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{n}$, quindi

(7.27) $$\Delta y = \sqrt{\frac{1}{n^2}\left(\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2\right)} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} = \frac{1}{n}\sqrt{n \cdot \Delta x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}}$$

quindi l'incertezza sulla media di n misure è $\sqrt{n}$ volte più piccola dell'incertezza sulla singola misura.

Un altro caso particolare è quello in cui

(7.28) $$y = k \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \ldots x_N^{k_N}$$

In tal caso la formula dell'**incertezza relativa** è particolarmente semplice e comoda da usare:

(7.29) $$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(k_i \frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^2}$$

Da questa possiamo ricavare l'incertezza assoluta moltiplicando per y.

Vogliamo notare un problema che sorge nell'incertezza incertezza relativa nel caso in cui la misura indiretta consiste nella differenza di due misure. Si debba calcolare

(7.30) $$y = a - b$$

a partire dalle due misure **a ± Δa** e **b ± Δb**; per l'incertezza si ha

(7.31) $$\Delta y = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2}$$

l'incertezza relativa è

(7.32) $$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2}}{a - b}$$

Se **a** è vicino a **b**, questa incertezza relativa può crescere anche molto (se a=b, va a infinito; ovviamente in questo caso l'incertezza relativa non ha senso).

L'espressione

(7.33) $$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

detta **errore massimo** viene talvolta utilizzata per scopi particolari. Il valore di questa espressione è sempre superiore a quello ottenuto con l'espressione (7.16) come è facile dimostrare. Infatti, consideriamo le due espressioni

(7.34) $$A = \left(\sum_i w_i \right)^2$$

e

(7.35) $$B = \sum_i w_i^2$$

in cui le w_i sono tutte positive. Esse rappresentano rispettivamente il quadrato della (7.33) e della (7.16). È immediato vedere che è sempre A > B , a causa dei termini misti (i doppi prodotti del quadrato del polinomio) che sono tutti positivi.

8 - Teoria delle Probabilità

- Definizione di probabilità
- Teoria assiomatica delle probabilità
- Probabilità condizionata
- Indipendenza stocastica

La **probabilità** è un numero, compreso tra 0 e 1, che indica il grado di possibilità che un certo evento si verifichi: esso è 1 se l'evento è certo, 0 se è impossibile.

La **Teoria delle Probabilità** è la disciplina matematica che si occupa di determinare quantitativamente il valore della probabilità nei vari casi. I primi matematici che si occuparono di probabilità furono **Gerolamo Cardano** (1501-1576), **Blaise Pascal** (1623-1662), **Pierre de Fermat** (1601-1665) e i fisici **Galileo Galilei** (1564-1642) e **Christiaan Huygens** (1629-1695) fecero lavori nel campo. Questi studi erano legati ai giochi d'azzardo, e da queste poco nobili origini deriva il termine "aleatorio" (da *alea*, in latino dado) uno degli aggettivi più usati per definire il tipo di eventi oggetto del calcolo delle probabilità. In seguito **Jacob Bernoulli** (1655-1705), **Abraham de Moivre** (1667-1754), **Thomas Bayes** (1702-1761), **Pierre-Simon de Laplace** (1749-1827) e **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) posero le basi del moderno calcolo delle probabilità.

Laplace propose quella che è detta la **definizione classica** di probabilità:

"La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, purché questi siano egualmente possibili"

Per esempio, supponiamo di avere un dado "perfetto", per cui tutte le facce siano equiprobabili, allora l'evento "uscita di un numero dispari" (cioè 1, 3 o 5) ha probabilità

$$\frac{3}{6} = 0.5$$

Ovviamente se il dado è irregolare, la probabilità delle varie facce non è uguale e quindi la definizione precedente non ci è di aiuto. Potremmo fare uno studio accurato della forma e della struttura interna del dado e ricavarne le probabilità delle varie facce, ma ciò potrebbe risultare molto complesso se non praticamente impossibile. Un altro modo di procedere è quello empirico: si lancia il dado moltissime volte e si calcola il numero di volte che ciascuna faccia esce (facendo attenzione a lanciare il dado "bene", cioè senza favorire anche involontariamente alcuna faccia) e si applica la seguente definizione, detta **definizione frequentista**:

"La probabilità di un evento è il limite al crescere all'infinito delle prove, della frequenza dell'evento, cioè del rapporto tra il numero delle prove favorevoli (in cui l'evento si verifica) e il numero totale delle prove"

Questa definizione si basa sulla cosiddetta **Legge Empirica del Caso** o **Legge dei Grandi Numeri**, secondo cui in una successione di prove ripetute, la frequenza di un evento si avvicina alla probabilità dell'evento stesso (ovviamente se tale probabilità la possiamo conoscere in modo non frequentista).

Tuttavia non sempre si possono fare un alto numero di prove ripetute, anzi a volte vorremmo conoscere la probabilità di eventi che non sono ripetibili. Per esempio, quale è la probabilità che domenica la squadra X vinca la partita ? Oppure quale è la probabilità che domani piova ? Oppure ancora qual è la probabilità che esistano sorgenti periodiche di onde gravitazionali di almeno una certa potenza entro un raggio di 1 kpc (kiloparsec, una unità di distanza astronomica non SI, ma usatissima in astrofisica). Per usare il calcolo delle probabilità per questo tipo di eventi è stata introdotta, dal matematico italiano **Bruno De Finetti** (1906-1985), la **definizione soggettiva** di probabilità:

"La probabilità di un evento è il grado di fiducia (variabile da soggetto a soggetto) riposta nel verificarsi dell'evento stesso"

In particolare questa definizione di probabilità ha portato allo sviluppo della cosiddetta statistica bayesiana.

Teoria assiomatica delle probabilità

Indipendentemente dalla definizione operativa di probabilità (classica, frequentista o soggettiva), **Andrei Kolmogorov** introdusse nel 1933 la definizione assiomatica di probabilità. In essa si evita di entrare nel significato di probabilità, e si considera solo l'aspetto matematico-formale, usando il formalismo della teoria degli insiemi. In essa

- gli "eventi" sono definiti come tutti i sottoinsiemi di uno spazio ambiente **S**,
- tra due eventi si definisce l'unione $\cup$ come l'occorrenza di almeno uno degli eventi dell'unione e l'intersezione $\cap$ come l'occorrenza di entrambi;
- viene definito $\overline{A}$ l'evento opposto di un evento A come l'evento tale che $A \cup \overline{A} = S$ e $A \cap \overline{A} = \varnothing$, dove $\varnothing$ è l'insieme vuoto.

Per definire la probabilità si parte dai seguenti assiomi:

I. Ad ogni sottoinsieme **A** di **S** è associato un numero reale **p(A)**, detto probabilità di **A**, compreso, estremi inclusi, tra 0 e 1
II. **p(S) = 1**
III. Se l'intersezione tra gli eventi **A** e **B** è vuota, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Facciamo un semplice esempio. Lo spazio **S** sia l'insieme delle carte di un mazzo da 52 carte da poker; gli eventi siano i sottoinsiemi di qualsiasi numero di carte, per esempio

a) i 4 assi

b) le carte di cuori
c) il sottoinsieme composto dal 2 di quadri e il 3 di fiori.

Associamo a ciascun sottoinsieme la probabilità di estrarre una carta appartenente ad esso, per esempio la probabilità associata al sottoinsieme a) è **1/13**, quella associata al b) è **1/4**, quella associata al c) è **1/26**. Per illustrare l'ultimo assioma, pensiamo all'unione dei due sottoinsiemi b) e c): essi sono disgiunti, hanno cioè intersezione nulla, quindi per l'ultimo assioma la probabilità associata al sottoinsieme unione è **1/13 + 1/26 = 3/26** .

A partire dagli assiomi di Kolmogorov, possono essere dedotti tutti i teoremi del calcolo delle probabilità. Tra i più semplici, i seguenti

Teorema 1. $p(A) = 1 - p(\overline{A})$

si deduce dagli assiomi II e III, infatti per definizione $A \cap \overline{A} = \varnothing$ e $A \cup \overline{A} = S$ e $p(S) = 1$, quindi $1 = p(A) + p(\overline{A})$, da cui l'asserto

Teorema 2. $p(\varnothing) = 0$

si deduce da II e dal teorema 1., infatti $\overline{\varnothing} = S$.

Teorema 3. Se $A \subseteq B$, allora $p(A) \leq p(B)$

si deduce dal fatto che **A** è un sottoinsieme di **B.**

Teorema 4. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Si ha :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) \\ &= [P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})] + [P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)] - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

la prima eguaglianza è per l'assioma III, la seconda è immediata, la terza usa il fatto che $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$ e $(A \cap B)$ e $(A \cap \overline{B})$ hanno intersezione nulla, e analogamente $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B$ e $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \varnothing$.

Probabilità condizionata

Introduciamo ora il concetto di **probabilità condizionata**. Definiamo $p(A\,|\,B)$ la probabilità di A dato B, cioè la probabilità dell'evento A se è occorso l'evento B.

Si dimostra che

(8.1) $$p(A\,|\,B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

e da questa si deduce

(8.2) $$p(A \cap B) = p(A\,|\,B) \cdot p(B) = p(B\,|\,A) \cdot p(A)$$

Si noti che la probabilità condizionata può vedersi come la definizione di un nuovo spazio ambiente ridotto, che non è più **S**, ma **B**.

Esempio: calcoliamo la probabilità condizionata di avere l'asso di picche (evento **A**), se è uscita una carta di picche (evento **B**): in tal caso, intuitivamente, mentre la probabilità di avere l'asso di picche senza nessuna condizione è **1/52**, la stessa, sotto la condizione di avere estratto una carta di picche è **1/13**.
Usando la formula, poiché $p(A) = 1/52$, $p(B) = 1/4$ e $p(A \cap B) = 1/52$ (lo stesso valore di **p(A),** perché **A** è un sottoinsieme di **B**), abbiamo il risultato **1/13**.

Se $p(A\,|\,B) = p(A)$, se cioè la probabilità di un evento A non è influenzata dall'occorrenza di un evento B, è facilmente dimostrabile che $p(B\,|\,A) = p(B)$ e diciamo che i due eventi sono **indipendenti** o anche **stocasticamente indipendenti**.

Nel caso di eventi indipendenti, dalle precedenti equazioni deduciamo che

(8.3) $$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Si noti che se due eventi A e B sono incompatibili, o mutuamente esclusivi, cioè se quando capita uno, non capita l'altro, ovvero se la loro intersezione è nulla, essi **non sono** indipendenti. In tal caso si ha, per l'assioma III, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

La statistica

La statistica si occupa dello studio quantitativo delle caratteristiche di insiemi omogenei di oggetti (per esempio l'insieme degli abitanti di un paese, degli studenti di una classe, degli atomi in una stanza, delle misure di una grandezza, eccetera); l'insieme omogeneo di oggetti viene detto **popolazione**.
Il termine statistica deriva da "stato" e in origine era la scienza che descriveva numericamente uno stato (come è noto i primi censimenti, per motivi militari o di

tassazione, risalgono agli albori della civiltà, per esempio quello riportato nel Libro dei Numeri, uno dei primi cinque libri della Bibbia). Inizialmente lo studio veniva effettuato considerando tutti gli individui della popolazione. Solo successivamente, per lo più nella seconda metà del XIX secolo, fu introdotto il calcolo delle probabilità nello studio della statistica. Tra i primi a propugnare questo passaggio furono **Adolphe Quetelet** (1796-1874), **Siméon-Denis Poisson** (1781-1840), **Francis Galton** (1822-1911) e **Karl Pearson** (1857-1936). In seguito a questa introduzione, lo studio della statistica poté essere fatto tramite **campioni**, cioè sotto-insiemi della popolazione.

9 - Combinatoria

- Permutazioni
- Permutazioni con ripetizione
- Combinazioni
- Disposizioni
- Disposizioni con ripetizione

Nel calcolo della probabilità in molti casi è fondamentale l'uso dell'analisi combinatoria. Introdurremo pertanto alcuni concetti e risultati fondamentali utili a tale scopo.

Permutazioni. Supponiamo di avere **N** oggetti distinti, in quanti modi possiamo ordinarli ? Per esempio, siano gli **N** oggetti un mazzo di 40 carte da gioco, in quanti modi distinti possiamo mescolarle ? Chiamiamo "permutazione" uno dei distinti ordinamenti.
Siano gli N oggetti $\{\mathbf{x_1, x_2, \ldots x_n}\}$; per il primo abbiamo N possibilità di scelta, quindi per il secondo ne abbiamo N-1 (le rimanenti carte, avendo scelto quella da mettere per prima), per il terzo N-2, fino ad arrivare all'ultima, in cui abbiamo una sola possibilità. Quindi il numero totale delle permutazioni di N oggetti è

$$N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Introduciamo ora la funzione **fattoriale del numero intero N**

$$N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (N-1) \cdot N \tag{9.1}$$

Per convenzione, si pone $0! = 1$.

Quindi diciamo che il numero delle permutazioni di **N** oggetti è **N!** (pronunciato N fattoriale).

Permutazioni con ripetizione. Supponiamo ora che gli N oggetti non siano tutti distinguibili, ma ce ne siano $\mathbf{N_1}$ di un tipo, $\mathbf{N_2}$ di un altro,…, $\mathbf{N_M}$ di un altro ancora.
Per esempio supponiamo di avere 7 palline rosse, 5 gialle e 8 blu: in quanti modi possiamo ordinare tali palline, sapendo che non possiamo distinguere tra palline dello stesso colore ? La soluzione in generale, è

$$\frac{N!}{N_1!\,N_2!\ldots N_M!} \tag{9.2}$$

come ci si può facilmente convincere pensando che, all'interno di ciascun sottogruppo, non esistono permutazioni (o meglio, tutte le permutazioni sono tra loro indistinguibili).

Disposizioni. Definiamo come numero di disposizioni di **N** oggetti di classe **k**, tutti i modi distinti in cui si possono disporre **k** oggetti scelti tra gli **N** (ovviamente **k ≤ N**).
Per esempio quante coppie di lettere distinte si possono formare ? In questo caso per il primo oggetto abbiamo N scelte, per il secondo N-1,…, per il k-esimo (N-k+1), quindi

(9.3) $$N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot (N-k+1) = \frac{N!}{(N-k)!}$$

Disposizioni con ripetizione. Supponiamo ora che nel caso precedente, tra i k oggetti disposti, si possano ripetere i singoli oggetti (e quindi può anche essere k > N).
È questo per esempio il caso dei numeri scritti con la notazione posizionale, quindi il problema equivale al seguente: quanti numeri si possono scrivere con k cifre usando la base N ? La soluzione, come è immediato dimostrare è

(9.4) $$N^k$$

Combinazioni. Supponiamo ora di avere **N** oggetti distinti e di volerne scegliere da questi **k**, senza tenere conto dell'ordinamento. Un tale tipo di scelta è detto "combinazione".
Per esempio, in quanti modi diversi possiamo estrarre 5 numeri da un'urna contenente i numeri da 1 a 90 ? (cioè, quale è il numero totale delle cinquine del gioco del lotto ?).
Il numero delle combinazioni di classe **k** (a **k** a **k**) di **N** oggetti è

(9.5) $$\frac{N!}{k!(N-k)!}$$

che in genere viene indicato con

(9.6) $$\binom{N}{k}$$

e viene chiamato **coefficiente binomiale**; infatti se consideriamo lo sviluppo del binomio $\mathbf{(a+b)^N}$, $\binom{N}{k}$ è pari al coefficiente del termine contenente la potenza **k** di **a** (o di **b**). È immediato vedere che

(9.7) $$\binom{N}{k} = \binom{N}{N-k}$$

Si noti che il numero di combinazioni di classe **k** di **N** oggetti è pari al numero di permutazioni di **N** oggetti appartenenti a due classi di oggetti indistinti, una di **k** elementi ed una di **(N-k)** elementi. E infatti le due classi non sono altro che quella degli oggetti "scelti" e quella degli oggetti "non scelti", all'interno delle quali il meccanismo delle combinazioni non fa differenza.
Così nello sviluppo della potenza del binomio si hanno $\mathbf{2^N}$ termini monomi, che sono tutte le possibili disposizioni con ripetizione di **N** simboli dei due tipi **a** o **b**; a causa della commutatività della moltiplicazione, non si distingue la posizione dei simboli nel monomio e tutti i termini monomi con **k** volte **a** e **N-k** volte **b** possono essere raccolti in un termine $a^k b^{N-k}$ con un coefficiente pari a quanti ce ne sono: da qui il risultato che tale coefficiente è pari al numero di combinazioni di classe k di N elementi.

Esempi:

1. **Nel gioco del totocalcio si devono indovinare i risultati di 13 partite, segnando per ciascuna 1 se si prevede vinca la squadra di casa, 2 se si prevede che perda e X se si prevede un pareggio. Quante sono le possibili "colonne" vincenti del totocalcio ?**

Si vede che in questo caso ci troviamo di fronte a un problema di disposizioni con ripetizione, dove N è eguale a 3 e k eguale a 13, quindi il numero totale è $3^{13} = 1594323$. Si noti tuttavia che in genere la probabilità di indovinare il pronostico è maggiore di $\mathbf{1/3^{13}}$, perché gli scommettitori possono avere informazioni a priori: a parte le informazioni sulla forza delle due squadre relative ad ogni partita, o ad informazioni particolari sullo stato di forma dei giocatori, è noto che comunque è favorita la squadra di casa e quindi conviene puntare su pronostici con più "1" che "2". Una ricerca fatta su oltre 30000 partite inserite nelle schedine del totocalcio in oltre 50 anni, ha evidenziato le seguenti percentuali:

1	**47 %**
2	**18 %**
X	**35 %**

Quindi la colonna vincente più probabile è quella che prevede tutte vittorie in casa (tutti 1) e ha probabilità $0.47^{13} \approx \frac{1}{18000} >> \frac{1}{1594323}$, che è circa 90 volte più alta del caso che i risultati fossero equiprobabili.

2. **Quante sono le probabilità di avere un solo "6" in 3 lanci di un dado "onesto" ?**

Per fare questo calcolo di probabilità, calcoliamo quante sono tutti i possibili risultati del lancio di 3 dadi e quanti di questi contengono un solo "6": tutti i lanci possibili sono $\mathbf{6^3=216}$ e di questi $3 \cdot 5^2 = 75$ contengono un solo "6" (questo 6 infatti può essere il valore del primo, del secondo o del terzo dado, per qualsiasi dei 5 possibili valori degli altri due che non sia un "6"). La probabilità è quindi 75/216 ≈ 0.3472.

3. Quante sono le probabilità di avere <u>almeno</u> un "6" in 3 lanci di un dado "onesto" ?

Per fare questo calcolo di probabilità, potremmo considerare tutti i possibili risultati del lancio di 3 dadi e calcolare quanti di questi contengono un "6", quanti due "6" e quanti tre e fare quindi il rapporto tra la somma di questi numeri e il numero totale di tutti i possibili risultati: si ha

$$\frac{75+15+1}{216} \approx 0.42129$$

Allo stesso risultato possiamo arrivare con un ragionamento più semplice, domandandoci quale sia la probabilità di non avere nessun "6" lanciando 3 dadi: questa si può calcolare o facendo il rapporto tra il numero di casi in cui non si ha nessun "6" (semplicemente $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$) e dividendolo per tutti i casi possibili ($6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$) o, calcolandola come il cubo della probabilità di non avere "6" in un lancio, quindi $(5/6)^3 \approx 0.5787$: la probabilità cercata è quindi la complementare di questa probabilità, $1-(5/6)^3 \approx 0.42129$.

4. Quali sono le probabilità delle varie vincite al gioco del Lotto ?

Nel gioco del Lotto si estraggono per ogni concorso 5 numeri da un'urna che ne contiene 90 (i numeri da 1 a 90). Vengono quindi premiati i giocatori che indovinano 1 ("estratto semplice"), 2 ("ambo"), 3 ("terno"), 4 ("quaterna") o tutti e 5 ("cinquina").

Per calcolare le probabilità dei vari tipi di vincita, calcoliamo prima quante sono le possibili combinazioni di k oggetti su N possibili. Come sappiamo questi sono $\binom{N}{k}$, quindi il numero di tutti i possibili estratti semplici, ambi, terni, quaterne e cinquine è rispettivamente $\binom{90}{1} = 90$, $\binom{90}{2} = 4005$, $\binom{90}{3} = 117480$, $\binom{90}{4} = 2555190$, $\binom{90}{5} = 43949268$.

Ma con 5 numeri estratti possiamo avere $\binom{5}{1} = 5$ estratti semplici, $\binom{5}{2} = 10$ ambi, $\binom{5}{3} = 10$ terni, $\binom{5}{4} = 5$ quaterne e $\binom{5}{5} = 1$ cinquina, quindi per calcolare le probabilità dobbiamo calcolare i rispettivi rapporti tra queste due quantità. Si ha

	Probabilità	**Il Lotto paga**	**Rapporto tra vincita equa e vincita vera**
Estratto semplice	$\frac{1}{18}$	**11.232**	**1.602**
Ambo	$\frac{2}{801}$	**250**	**1.602**
Terno	$\frac{1}{11748}$	**4250**	**2.764**
Quaterna	$\frac{1}{511038}$	**80000**	**6.388**
Cinquina	$\frac{1}{43949268}$	**1000000**	**43.949**

Nella tabella sono anche riportate le vincite pagate dal Lotto (in numero di volte la posta). I calcoli sono stati fatti supponendo le giocate su una sola “ruota”.

10 - Variabili casuali discrete

- Variabili casuali discrete
- Distribuzione di probabilità
- Valor medio
- Varianza

A volte i risultati possibili di un esperimento probabilistico (cioè in cui ad ogni possibile risultato è associata una probabilità di occorrenza) sono un insieme discreto di numeri (cioè un numero finito o un'infinità numerabile); per esempio:

a) il numero uscito (1,2,…,6) nel lancio di un dado “onesto”
b) la somma di valori usciti nel lancio di due dadi “onesti” ($v_i = i+1$ per $1 \le i \le 11$)
c) il numero uscito (1,2,…,6) nel lancio di un dado “disonesto”
d) il numero estratto da un'urna del lotto moltiplicato per **2π** (**v_i = 2πi**)
e) il numero di punti fatto in una partita di calcio da una squadra che gioca in casa (**3** per la vittoria, **1** per il pareggio e **0** per la sconfitta, **v_1=0, v_2=1, v_3=3**)
f) il numero di particelle rivelate da un rivelatore in un dato intervallo di tempo (da 0 a un numero molto alto, dipendente dalla risoluzione del rivelatore, che possiamo convenzionalmente dire infinito)
g) il voto che uno studente prenderà ad un dato esame {**0, 18, 19,…, 30, 33**, dove da 18 a 30 sono veri voti, mentre 0 e 33 indicano il non superamento dell'esame e il 30 e lode)
h) il numero di studenti che saranno presenti domani

Definiamo in tal caso **"variabile casuale (o aleatoria) discreta"** la variabile **v** che può assumere i possibili numeri "risultato" **{v_1, v_2, …, v_N}** (con **N** eventualmente infinito), su cui sono definite le probabilità di occorrenza **{p_1, p_2, …, p_N}**. Si ha

(10.1)
$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$

che si deduce dal fatto che le **{v_i}**sono tutti e soli i possibili risultati dell'esperimento, incompatibili tra loro. La successione **{p_i}** è detta **distribuzione di probabilità** della variabile casuale **v_i**. Per esempio, negli esempi di sopra,

a) se il dado è "onesto", $p_i = \frac{1}{6}$
b) per $1 \le i \le 6$, $p_i = \frac{i}{36}$; per $7 \le i \le 11$, $p_i = \frac{12-i}{36}$
c) per esempio, per un dado truccato che favorisce l'uscita del 6, si può avere **p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=0.15** e **p_6=0.25**

d) $p_i = \dfrac{1}{90}$

e) per esempio, $\mathbf{p_1 = 0.18}$, $\mathbf{p_2 = 0.35}$, $\mathbf{p_3 = 0.47}$

f) per esempio, $p_i = \dfrac{\alpha^i e^{-\alpha}}{i!}$, dove i è il numero di particelle e α un parametro dipendente dalla situazione sperimentale.

Si noti che la distribuzione di probabilità descrive completamente un esperimento probabilistico con un numero discreto di possibili risultati. Se ripetiamo molte volte l'esperimento e istogrammiamo i risultati $\{x_1, x_2, \ldots, x_M\}$, (ciascuno degli x_k è uno dei possibili valori v_i) per la legge dei grandi numeri la frequenza f_i dei vari risultati si avvicinerà, al crescere del numero M di ripetizioni, sempre più alla loro probabilità:

(10.2) $$f_i \to p_i$$

L'insieme dei risultati $\{x_1, x_2, \ldots, x_M\}$, osservati nelle M prove è detto **campione**; talora sono detti **campioni** (**samples** in Inglese) i singoli risultati. Nel caso in cui gli x_k provengano da un processo di misura, sono detti anche misure o dati sperimentali (o semplicemrnte dati).

Data una variabile casuale discreta $\mathbf{v_i}$, definiamo **valore aspettato** o **valor medio** della variabile **v** il numero

(10.3) $$E[\mathrm{v}] = \sum_i \mathrm{v}_i p_i$$

spesso il valore aspettato di una variabile v viene indicato con μ_{v} o, quando non ci sono possibili equivoci, semplicemente con μ.

Negli esempi precedenti abbiamo

a) $E[\mathrm{v}] = \dfrac{21}{6} = 3.5$. Si noti che, sebbene i risultati siano tutti interi, in questo caso il valore aspettato non è uno dei risultati e non è neanche intero.

b) $E[\mathrm{v}] = \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5 + 5\cdot 6 + 6\cdot 7 + 5\cdot 8 + 4\cdot 9 + 3\cdot 10 + 2\cdot 11 + 1\cdot 12}{36} = 7$.
Si noti che il valore aspettato della soma di due dadi è pari alla soma dei valori aspettati: è questo un risultato generalizzabile.

c) $E[\mathrm{v}] = 0.15\cdot(1+2+3+4+5) + 0.25\cdot 6 = 3.75$. Si noti che in questo caso il valore aspettato è un po' maggiore di quello del dado "onesto": ciò perché il "6", che è il valore più alto, è più probabile degli altri risultati.

d) $E[\mathrm{v}] = 91\pi$. Notare che in questo caso, sebbene la variabile casuale sia discreta, i risultati possibili non sono interi.

e) $E[\mathrm{v}] = 0.18\cdot 0 + 0.35\cdot 1 + 0.47\cdot 3 = 1.76$

f) $E[\mathrm{v}] = \alpha$

Per la legge dei grandi numeri, per un gran numero di prove la frequenza del risultato $\mathbf{v_i}$ tende alla probabilità $\mathbf{p_i}$, quindi la media aritmetica dei risultati tende al valore aspettato. Per esempio, se sommiamo i risultati di mille lanci di un dado "onesto" e dividiamo questa somma per il numero dei lanci (ottenendo così la media aritmetica dei risultati), questo valore tende a 3.5 al tendere all'infinito del numero dei lanci. Cioè per M tendente a infinito

(10.4) $$\overline{x} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} x_j \rightarrow \sum_i p_i \mathrm{v}_i$$

Per comprendere bene questo risultato, notiamo che la media $\overline{x}$ può ottenersi dall'istogramma di frequenza come

(10.5) $$\overline{x} = \sum_i f_i \mathrm{v}_i$$

(vedi anche capitolo 5) e poiché $f_i \rightarrow p_i$, allora $\overline{x} \rightarrow \mu$.

Una media pesata di M numeri è una combinazione lineare degli M numeri, in cui i coefficienti hanno per somma 1. Il valore aspettato può essere visto come una **media pesata** dei valori della variabile casuale, con "pesi" pari ai p_k, cioè una media in cui i vari termini non "pesano" allo stesso modo, ma proporzionalmente ai p_k.
Le espressioni $E[\mathrm{v}] = \sum_i \mathrm{v}_i p_i$ e $\overline{x} = \sum_i f_i \mathrm{v}_i$ sono medie pesate.

L'operatore "valore aspettato" E[.] può essere applicato a qualsiasi funzione della variabile casuale. Data una funzione y=f(v),

(10.6) $$E[y] = \sum_i p_i y_i = \sum_i p_i f(\mathrm{v}_i)$$

Per esempio, se $y = \mathrm{v}^2$, nell'esempio a) si ha $E[\mathrm{v}^2] = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6} = 15.1\overline{6}$.
Il valore aspettato della funzione costante **y=k** (indipendente da $\mathbf{x_i}$) è **k**.

Data una distribuzione di probabilità, definiamo **varianza della distribuzione** il parametro

(10.7) $$\sigma^2 = E\left[\left(\mathrm{v} - E[\mathrm{v}]\right)^2\right] = E[\mathrm{v}^2 - E[\mathrm{v}]^2] = E[\mathrm{v}^2] - E[\mathrm{v}]^2 = \sum_i \mathrm{v}_i^2 p_i - \left(\sum_i \mathrm{v}_i p_i\right)^2$$

Definiamo **deviazione standard della distribuzione** σ la radice quadrata della varianza.

Nell'esempio a) abbiamo $\sigma^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{182-147}{12} = \frac{35}{12} = 2.91\overline{6}$ e la deviazione standard è $\sigma \approx 1.707$.

ATTENZIONE ! Non confondere i parametri che descrivono un insieme di dati sperimentali (il "campione"), cioè la media e la varianza campionaria, da quelli che descrivono la distribuzione da cui i dati sono estratti, cioè il valor medio e la varianza della distribuzione (o, come anche si dice, della "popolazione"). Quando ci sarà possibilità di equivoco, indicheremo le grandezze campionarie (varianza, deviazione standard, covarianza, ecc… campionarie) con una tilde "$\tilde{\ }$" sopra o, se si vuole sottolineare il fatto che si tratta di una stima di un parametro della popolazione (vedi capitolo sulla stima), con una cuspide "$\hat{\ }$".

Ripetendo più volte un esperimento probabilistico, la **varianza campionaria** tende, al crescere del numero delle prove M, alla **varianza della distribuzione**:

(10.8)
$$\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} x_k^2 - \overline{x}^2 \rightarrow \sum_{i=1}^{N} \mathrm{v}_i^2 p - \left(\sum_{i=1}^{N} \mathrm{v}_i p_i\right)^2$$

11 - Distribuzioni discrete

- Distribuzione uniforme discreta
- Distribuzione binomiale
- Distribuzione di Poisson

Distribuzione uniforme discreta

Sia $\mathbf{v_i = a + i - 1}$, per $\mathbf{1 \le i \le N}$, e $\mathbf{p_i = 1/N}$ dove **a** è un numero intero. Esempi di questa distribuzione è per esempio il lancio di un dado ("onesto"), per cui $\mathbf{a = 1}$ e $\mathbf{N = 6}$, o l'estrazione di un numero dall'urna del Lotto, dove $\mathbf{a = 1}$ e $\mathbf{N = 90}$. Possiamo calcolare il valor medio e la varianza

(11.1)
$$\mu = E[v] = a + \frac{N-1}{2}$$

(11.2)
$$\sigma^2 = \frac{(N-a+1)^2 - 1}{12}$$

Nel caso del dado si ha $\mu = 3.5$ e $\sigma^2 = \frac{35}{12} = 2{,}91\overline{6}$.

Distribuzione binomiale

Supponiamo di fare delle prove ripetute i cui possibili risultati sono due: chiamiamoli convenzionalmente "**successo**" e "**insuccesso**". Per esempio eseguiamo il lancio di un dado e consideriamo "successo" (**S**) l'uscita del "2" o del "6" e "insuccesso" (**I**) gli altri casi. La successione dei risultati delle varie prove potrà essere descritta per esempio dalla seguente successione

S S I S I I I S I I S….

Una successione di prove di questo tipo, cioè con due soli possibili risultati è detta successione di prove alla Bernoulli, dal nome del matematico svizzero Jakob Bernoulli.

Il problema che ci poniamo è: data la probabilità di successo **p** (e di insuccesso **q = 1 – p**) e il numero di prove **N**, quale è la probabilità di avere **k** successi ?
Notare che non interessa l'ordine dei successi, ma solo il numero totale k, che può essere compreso tra 0 (nessun successo) e N (nessun insuccesso).

Per calcolare questa probabilità, notiamo che la probabilità di avere k successi in un preciso ordine è data dal prodotto delle probabilità dei successivi risultati, quindi, nel caso precedente,

$$p \cdot p \cdot q \cdot p \cdot q \cdot q \cdot q \cdot p \cdot q \cdot q \cdot p \cdot \ldots.$$

che, per le proprietà della moltiplicazione, può essere scritta come

(11.3) $$p^k q^{N-k} = p^k (1-p)^{N-k}$$

Poiché non ci interessa l'ordine, abbiamo $\binom{N}{k}$ casi equivalenti (cioè con lo stesso numero di successi, ma con diverso ordine). Ricordiamo che $\binom{N}{k}$ è il numero delle combinazioni di classe k di N oggetti. La probabilità è quindi

(11.4) $$p_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

k è quindi una variabile casuale discreta con valori possibili gli interi da **0** a **N** e probabilità $\mathbf{p_k}$. La distribuzione di $\mathbf{p_k}$ è nota come **distribuzione binomiale** (talvolta chiamata anche **distribuzione di Bernoulli**, ma qualcuno indica con questo nome il caso in cui N = 1).

Verifichiamo che $\sum_k p_k = 1$. Per far ciò notiamo che la potenza N-esima del binomio (p+q), che vale 1, si può sviluppare con

(11.5) $$(p+q)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = 1$$

q.e.d. . .

Possiamo calcolare il valore aspettato e la varianza della distribuzione binomiale. Per il valore aspettato abbiamo

(11.6) $$E[k] = \sum_{k=0}^{N} k \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = N \cdot p$$

che è un risultato intuitivo. Il calcolo diretto è complicato; si può però fare con un semplice "trucco": ricordiamo che

(11.7) $$(p+q)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = 1$$

possiamo ora derivare parzialmente rispetto a p i primi due termini, ottenendo

(11.8)
$$\frac{\partial (p+q)^N}{\partial p} = N(p+q)^{N-1} = N = \sum_k k \binom{N}{k} p^{k-1} q^{N-k}$$

moltiplicando per p gli ultimi due termini dell'eguaglianza, abbiamo

(11.9)
$$N \cdot p = \sum_k k \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

q.e.d.

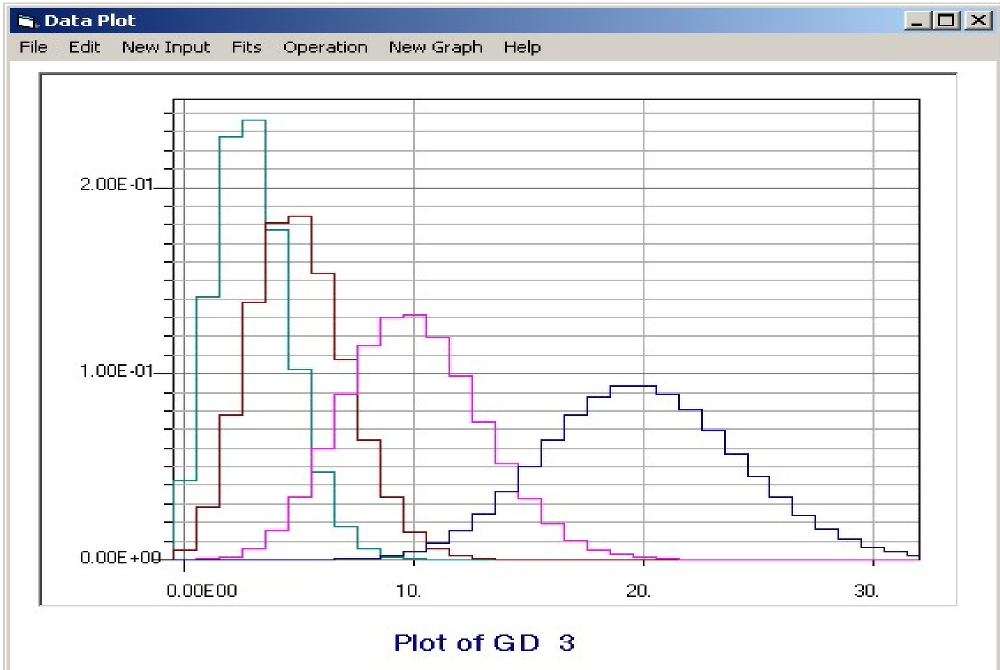
Per la varianza si calcola

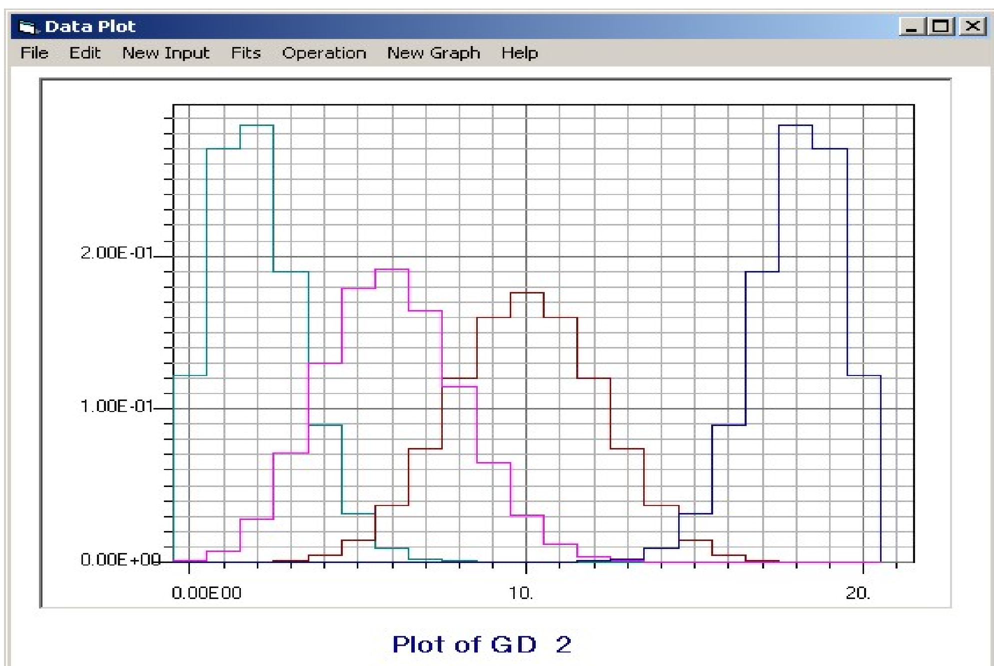
(11.10)
$$\sigma^2 = E[(k - N \cdot p)^2] = \sum_{k=0}^{N} (k - N \cdot p)^2 \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = N \cdot p \cdot q$$

(la dimostrazione è nel capitolo 20). La deviazione standard quindi è

(11.11)
$$\sigma = \sqrt{N \cdot p \cdot q}$$

Di seguito sono riportati alcuni andamenti della distribuzione binomiale (calcolati con SnagLab), nella prima figura per p = 0.1 e N = 20, 50, 100, 200 e nella seconda figura per N = 20 e p = 0.1, 0.3, 0.5, 0.9 (notare la simmetria del caso p = 0.5 e la simmetria reciproca tra i casi p = 0.1 e p = 0.9).





Se p = ½ , allora la distribuzione binomiale diventa semplicemente

(11.12) $$p_k = \binom{N}{k} \frac{1}{2^N}$$

il valor medio è $\mu = \frac{N}{2}$ e la deviazione standard è $\sigma = \frac{\sqrt{N}}{2}$.

Distribuzione di Poisson

Consideriamo ora il fenomeno del decadimento radioattivo. I nuclei di taluni isotopi hanno la proprietà di emettere particelle, trasformandosi ("decadendo") in altri nuclei.
Se si osserva un campione di materia composta da un certo isotopo, si possono osservare con dei particolari strumenti (come per esempio il contatore Geiger) le particelle emesse.
Queste emissioni avvengono in modo casuale nel tempo e dato un campione di materia radioattiva e un contatore disposto in un certo modo, è definito un numero medio di decadimenti in un certo intervallo di tempo. Tale **numero medio** μ (che può anche non essere intero) è **proporzionale alla lunghezza dell'intervallo**, cioè

(11.13) $$\mu = \lambda \cdot \Delta t$$

dove Δt è la lunghezza dell'intervallo e λ è una costante (cioè non varia nel tempo e quindi non varia μ, mentre ovviamente varia il numero di particelle rivelate in intervalli successivi eguali).

Un fenomeno con caratteristiche probabilistiche di questo genere viene chiamato un **processo di Poisson**.
Ci sono molti fenomeni che, almeno in approssimazione, possono essere descritti come un processo di Poisson: per esempio la rivelazione dei raggi cosmici tramite un contatore di particelle, le telefonate che arrivano ad un centralino, l'esplosione dei pop corn nella padella, ecc. . Tutti questi esempi non sono esattamente descritti da un processo di Poisson, perché il numero medio per unità di tempo varia nel tempo (per esempio di notte ci sono meno telefonate al centralino) e quindi non è neanche proporzionale all'ampiezza dell'intervallo.

Se definiamo un intervallo di tempo, in presenza di un processo di Poisson, possiamo definire una variabile casuale discreta k, intera non negativa ($0 \le k < \infty$). Tale variabile segue la cosiddetta **distribuzione di Poisson**.

Per ricavare l'espressione della distribuzione di Poisson, dividiamo idealmente l'intervallo di tempo in un numero molto elevato N di intervallini larghi $\frac{\Delta t}{N}$, così elevato da avere un numero aspettato molto piccolo di particelle ("eventi") nell'intervallino $\varepsilon = \frac{\mu}{N} << 1$. In una tale situazione, quasi tutti gli intervallini non conterranno eventi e solo una piccola frazione ε ne conterranno uno e praticamente nessuno due (se quest'ultima condizione non fosse verificata, potremmo aumentare ancora N).
Possiamo ora considerare la successione degli intervallini come una successione di N prove ripetute alla Bernoulli, con probabilità di successo $p = \varepsilon$. La probabilità di avere k eventi si

potrebbe quindi calcolare con una distribuzione di Bernoulli, anche se nel caso estremo di $N \to \infty$ e $p \to 0$, restando tuttavia, ovviamente,

(11.14) $$N \cdot p = \mu$$

Applichiamo queste condizioni alla distribuzione binomiale $p_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$. Si nota che, per k<<N,

(11.15) $$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!} = \frac{N(N-1)(N-2)...(N-k+1)}{k!} \approx \frac{N^k}{k!}$$

inoltre

(11.16) $$(1-p)^{N-k} = \left(1-\frac{\mu}{N}\right)^{N-k} \approx \left(1-\frac{\mu}{N}\right)^{N} \to e^{-\mu}$$

e quindi, sostituendo le varie espressioni limite e $N \cdot p = \mu$, abbiamo la **distribuzione di Poisson**

(11.17) $$P(k;\mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

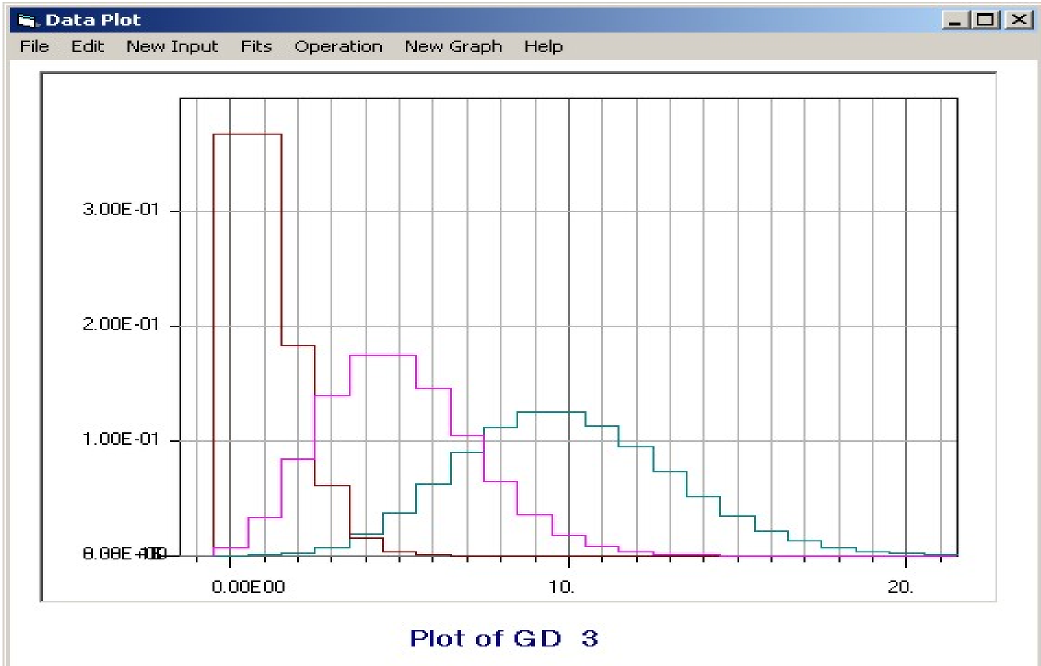
Il calcolo del valore aspettato e della varianza discende immediatamente dal caso limite della binomiale e si ha

(11.18) $$E[k] = N \cdot p = \mu$$

(11.19) $$\sigma^2 = N \cdot p \cdot (1-p) \to N \cdot p = \mu$$

Si noti che questa distribuzione ha un solo parametro (μ), mentre la binomiale ne ha due (N e p).

In figura ci sono alcuni andamenti della distribuzione di Poisson, per μ = 1, 5, 10 :


Data Plot
File Edit New Input Fits Operation New Graph Help
3.00E-01
2.00E-01
1.00E-01
0.00E00
10.
20.
Plot of GD 3

12 - Variabili casuali continue

- Densità di probabilità
- Funzione di distribuzione cumulativa
- Valor medio e varianza
- Mediana e moda
- Asimmetria e curtosi
- Disuguaglianza di Chebyshev
- Somma di variabili casuali indipendenti

Quando i possibili risultati di un esperimento probabilistico sono costituiti da uno o più intervalli (eventualmente infiniti) di numeri reali, definiamo tali risultati come una **variabile casuale continua**. Facciamo qualche esempio:

a) L'altezza di un generico ragazzo italiano di venti anni
b) La lunghezza dei cilindretti prodotti da una fresa
c) L'errore casuale in una misura con alta sensibilità

Una caratteristica delle variabili casuali continue è che, a parte casi particolari di cui non ci occupiamo in questo corso, la probabilità di un preciso valore della variabile è infinitesimo, mentre si possono associare valori di probabilità (eventualmente il valore 0) a qualsiasi intervallo dell'asse reale su cui si definisce la variabile. Ciò si descrive tramite la funzione **densità di probabilità**, spesso chiamata anche **funzione di distribuzione**.

Data la variabile casuale x, definiamo la densità di probabilità f(x) con le seguenti proprietà, per $-\infty < x < \infty$,

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$
- $\text{Prob}(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$

Quindi la probabilità che la variabile casuale prenda valori compresi nell'intervallo (a,b) è dato dall'integrale della densità di probabilità della variabile nell'intervallo.

Come per una variabile casuale discreta, anche per una variabile casuale continua può definirsi il **valore aspettato** o **valor medio** della variabile casuale. In questo caso si pone

(12.1) $$\mu = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

data una funzione g(x) della variabile casuale x, possiamo calcolare il valore aspettato di g(x) (detto **valor medio di g(x)**) come

(12.2) $$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\, dx$$

Un caso particolare è $g(x) = (x-\mu)^2$, il cui valore aspettato definisce la **varianza** della densità f(x), detta anche varianza di insieme della variabile casuale x o varianza della distribuzione[3]

(12.3) $$\sigma^2 \equiv Var[x] = E[(x-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx$$

Se si ripete **N** volte un esperimento probabilistico il cui risultato è descritto da una variabile casuale continua **x** descritta da una densità di probabilità **f(x)**, si ottiene una successione di **N** numeri reali $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, (il "**campione**"), analogamente a quanto accade per il caso delle variabili discrete. Questi possono essere per esempio:

a) Le altezze di un gruppo di ragazzi italiani di venti anni
b) Le lunghezze di alcuni cilindretti prodotti da una fresa
c) Gli errori casuali di misure ripetute, con alta sensibilità, di una certa grandezza

Tali numeri possono essere istogrammati usando una griglia uniforme[4]

(12.4) $$g_i = g_{MIN} + i \cdot \Delta g$$

in modo da aumentare di 1 $\mathbf{h_i}$ per ogni numero compreso tra $\mathbf{g_{i-1}}$ e $\mathbf{g_i}$.

Il valore aspettato di $\mathbf{h_i}$ è

(12.5) $$E[h_i] = N \cdot \int_{g_{i-1}}^{g_i} f(x)\, dx$$

Se si calcola la media e la varianza campionaria $\tilde{\sigma}^2$,

(12.6) $$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

e

(12.7) $$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$$

[3] In statistica viene anche detta "varianza della popolazione"
[4] Per semplicità. Si possono anche usare per gli istogrammi griglie non uniformi.

vediamo che questi due valori, per la legge dei grandi numeri, tendono rispettivamente al valor medio μ e alla varianza d'insieme σ^2.

Trasformazioni lineari per valor medio e deviazione standard

Analogamente a ciò che abbiamo fatto per media e deviazione standard campionaria, possiamo vedere come diventa il valor medio e la deviazione standard se trasformiamo linearmente una variabile casuale.
Sia **x** una variabile casuale con valor medio μ_x e deviazione standard σ_x. Costruiamo una nuova variabile

(12.8) $$y = A \cdot x + B$$

Per la linearità dell'operatore E[], è immediato verificare che la variabile y ha valor medio e deviazione standard

(12.9) $$\mu_y = \mu_x + B$$

e

(12.10) $$\sigma_y = A \cdot \sigma_x$$

risultato ovviamente analogo a quello ottenuto per le grandezze campionarie nel capitolo 5.

Distribuzione cumulativa di una variabile casuale

Per descrivere una variabile casuale, talora, invece della densità di probabilità **f(x)**, si usa la funzione "**distribuzione cumulativa**" **F(x)** definita come

(12.11) $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\, d\xi = \text{Prob[variabile casuale } \le \text{ x]}$$

e si ha

(12.12) $$\text{Prob}(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

La F(x) è una funzione non decrescente di x . Per $x \to \infty$ si ha $F(x) \to 1$.

Nota la F(x), possiamo ricavare la f(x) come

(12.13) $$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Valor medio, mediana e moda

Esistono altri due parametri di posizione di una densità di probabilità, oltre al valor medio, che sono talora usati. Essi sono:

- la **mediana**, il valore **m** per cui $F(m) = \frac{1}{2}$, cioè il valore della variabile casuale per cui si ha esattamente la stessa probabilità che il risultato dell'esperimento probabilistico sia maggiore o inferiore ad essa. È ovvia l'analogia alla mediana introdotta del capitolo 5 come parametro di posizione per descrivere un insieme di dati.

- la **moda**, il valore per cui la densità di probabilità ha il massimo assoluto, cioè il valore verso cui più si addensano i risultati delle ripetizioni dell'esperimento probabilistico descritto da f(x).

Momenti superiori: asimmetria e curtosi

Una densità di probabilità è in prima approssimazione descritta dai parametri μ e la varianza σ^2 che vengono anche detti rispettivamente **momento del primo ordine** e **momento centrale del secondo ordine**. Ulteriori parametri sono definiti a partire dai momenti centrali di ordine superiore

(12.14) $$\mu^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k f(x)\, dx$$

dove k è l'ordine del momento. In particolare si definiscono i parametri **asimmetria** (**skewness** in inglese) e **curtosi** (**kurtosis** in inglese) come

(12.15) $$\text{asimmetria} = \frac{\mu^{(3)}}{\sigma^3}$$

e

(12.16)
$$\text{curtosi} = \frac{\mu^{(4)}}{\sigma^4} - 3$$

Notare la normalizzazione per la relativa potenza della deviazione standard. L'asimmetria è 0 se la densità è simmetrica, è positiva se ha una coda più "pesante" a destra ed è negativa se la coda più pesante è a sinistra. La curtosi descrive la "pesantezza" delle code; il 3 a sottrarre serve per rendere più comodo il parametro: come vedremo questa scelta rende nulla la curtosi della distribuzione di Gauss, che assume quindi il carattere di distribuzione di riferimento.

Disuguaglianza di Chebyshev

Sappiamo che la deviazione standard descrive quanto una densità di probabilità è "stretta" intorno alla media. La disuguaglianza di Chebyshev dà a questa definizione qualitativa un carattere probabilistico quantitativo.

Per una variabile casuale **x** con media μ e deviazione standard σ, si ha che

(12.17)
$$\text{Probabilità}\left(\left|\mathrm{x} - \mu\right| \geq \mathrm{k} \cdot \sigma\right) \leq \frac{1}{\mathrm{k}^2}$$

Ovviamente questa disuguaglianza ha senso per k > 1. Come vedremo, per le più comuni distribuzioni, $\text{Probabilità}\left(\left|\mathrm{x} - \mu\right| \geq \mathrm{k} \cdot \sigma\right)$ è molto minore di $\frac{1}{k^2}$.

Somma di variabili casuali indipendenti

Se abbiamo due variabili casuali indipendenti (vedremo in seguito il significato rigoroso di questa parola) **x** e **y**, definite da due densità di probabilità **f(x)** e **g(y),** si dimostra che la loro somma **z = x + y** ha densità di probabilità **h(z)** data da

(12.18)
$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) g(z - \zeta)\, d\zeta$$

Un risultato importante è che in questo caso si ha

(12.19) $$E[z] = E[x] + E[y]$$

e

(12.20) $$Var[z] = Var[x] + Var[y]$$

(la prima è vera anche se le variabili non sono indipendenti).

Questo è il più grande vantaggio di aver scelto la deviazione standard (che è la radice quadrata della varianza) come parametro di dispersione: che la somma di due variabili casuali indipendenti ha come varianza la somma delle varianze.

Questo risultato **vale anche per le variabili discrete** e può essere generalizzato al caso di **N** variabili $\mathbf{x_i}$, ciascuna con deviazione standard σ_i, eventualmente con coefficienti $\mathbf{a_i}$.

Se $y = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i$, si ha

(12.21) $$\mu_y = E[y] = \sum_{i=1}^{N} a_i E[x_i]$$

(12.22) $$Var[y] = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 \sigma_i^2$$

(12.23) $$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} a_i^2 \sigma_i^2}$$

dove σ_y è la deviazione standard della somma **y**.

Vedremo come si modifica questo risultato nel caso di variabili non indipendenti. Si noti l'analogia con l'equazione del capitolo 7 per la propagazione delle incertezze nel caso di $y = f(x_1, x_2, ..., x_N)$.

Un caso particolare di combinazione lineare è la <u>media</u>, dove i coefficienti sono semplicemente $a_i = \frac{1}{N}$, per tutti gli i. In tal caso si vede che

(12.24) $$\mu_y = \mu_x$$

e

(12.25) $$\sigma_y = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

risultato che avevamo già anticipato.

Esempio di applicazione: supponiamo di lanciare 10 dadi e di sommarne i risultati, quale è il valor medio e la varianza di questa somma ?

La media e la varianza per il lancio di un dado sono (vedi capitolo 11) rispettivamente 3.5 e 35/12. Per la somma di 10 dadi quindi abbiamo valor medio 35 e varianza 350/12.

13 - Distribuzioni continue

- Distribuzione uniforme
- Distribuzione di Gauss
- Distribuzione normale standardizzata
- Approssimazione gaussiana
- Teorema del limite centrale
- Distribuzione del χ^2
- Distribuzione di Cauchy

Distribuzione uniforme (continua)

La distribuzione uniforme è definita come

(13.1)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{per } a \le x \le b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il valor medio è

(13.2)
$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \left[\frac{x^2/2}{b-a}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2\cdot(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

i momenti centrali di ordine k sono

(13.3)
$$\mu^{(k)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x-\mu)^k\,dx = \left[\frac{1}{(k+1)(b-a)}\cdot\left(x-\mu\right)^{k+1}\right]_a^b = \frac{\left(b-a\right)^{k+1}-\left(a-b\right)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)\cdot(b-a)}$$

Si nota che per k dispari $\mu^{(k)}=0$, mentre per k pari

(13.4)
$$\mu^{(k)} = \frac{\left(b-a\right)^k}{2^k\cdot(k+1)}$$

la varianza è quindi

(13.5) $$\sigma^2 = \mu^{(2)} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

L'asimmetria è ovviamente nulla (la distribuzione è perfettamente simmetrica intorno al valor medio) e la curtosi è negativa, pari a $-\frac{6}{5}$, indicando code molto leggere (in questo caso sono nulle).

La distribuzione uniforme descrive l'**errore di lettura**, in particolare nel caso di strumenti digitali. Infatti si può supporre che la misura "vera" (il misurando) sia con eguale probabilità in qualsiasi punto dell'intervallo associato a un valore del display.
Talvolta la si associa a misure in cui è indicato l'errore massimo.

Distribuzione di Gauss

Laplace e Gauss dimostrarono, verso la fine del XVIII secolo, che se ci sono moltissime cause indipendenti, ciascuna delle quali altera di pochissimo il risultato di una misura, con eguale probabilità in eccesso e in difetto, l'errore di misura totale ha una densità di probabilità

(13.6) $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

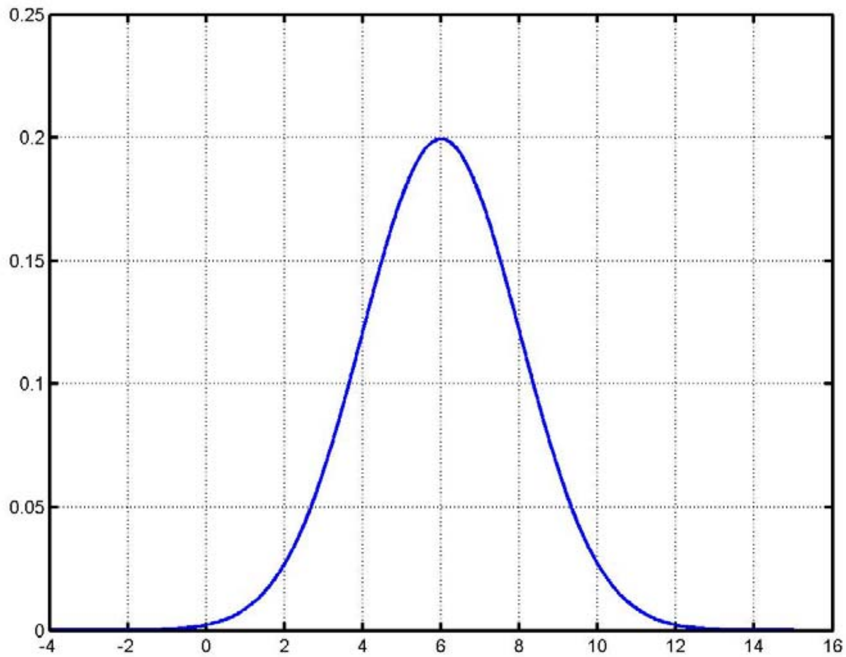
È questa una distribuzione di probabilità di forma a campana, simmetrica rispetto a x = 0, con varianza σ che viene denominata **distribuzione di Gauss** o **distribuzione normale**.
Questa può generalizzarsi al caso in cui il valor medio non sia 0 come

(13.7) $$f(x\,;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = G(x\,;\mu,\sigma)$$

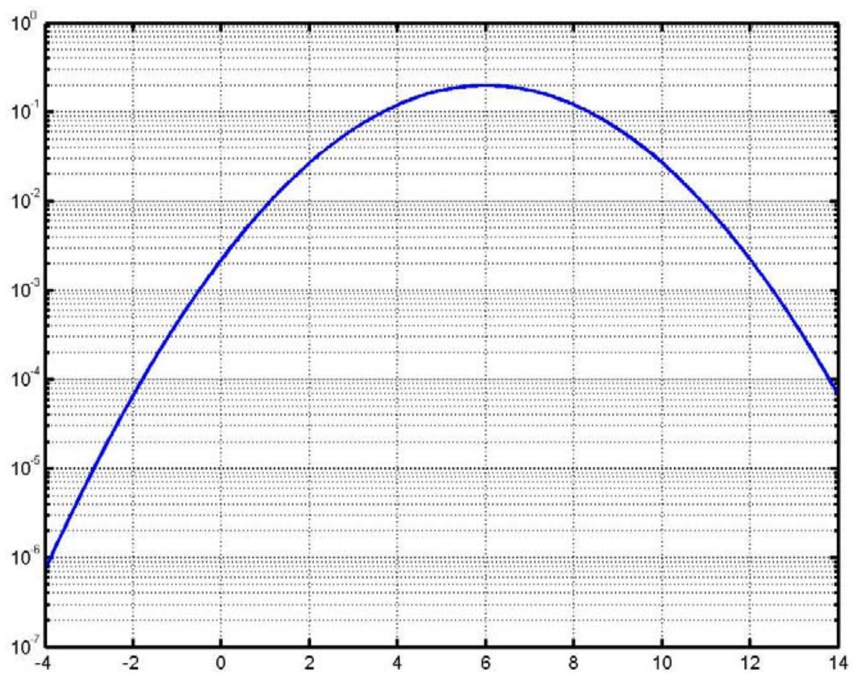
dove i parametri μ e σ sono il valor medio e la deviazione standard, che è anche la distanza tra l'asse di simmetria e ciascuno dei due punti di flesso.

I parametri di asimmetria e curtosi di una distribuzione gaussiana sono entrambi nulli.

Nella seguente figura è rappresentata una distribuzione gaussiana di valor medio 6 e deviazione standard 2.



La stessa funzione, in scala semilogaritmica appare come:



Si vede che ha, ovviamente, la semplice forma di una parabola.

La rappresentazione con l'ordinata logaritmica, per una distribuzione di probabilità o per un istogramma di dati sperimentali, è particolarmente utile quando si vogliono studiare le code.

La grande importanza della distribuzione di Gauss deriva dal teorema del limite centrale e dal fatto che alcune distribuzioni sono approssimabili da essa.

La difficoltà che sorge nell'uso di questa distribuzione è nel fatto che non esiste una forma analitica dell'integrale di f(x) e quindi del calcolo della probabilità che la variabile casuale sia in un certo intervallo.

Per risolvere questo problema di calcolo si introduce la seguente funzione

(13.8) $$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = f(z\,;0,1)$$

detta **distribuzione normale standardizzata**, pari alla distribuzione normale con valor medio 0 e varianza 1. L'integrale di questa funzione, che non ha parametri, cioè la funzione di distribuzione cumulativa

(13.9) $$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(\zeta)\, d\zeta$$

si trova tabulata in molti manuali di probabilità o statistica (vedi anche in appendice a questi appunti). Data la simmetria della distribuzione, le tavole in genere riportano solo i dati per $z \geq 0$; per ottenere i valori per z < 0, si ricordi che, per la simmetria,

(13.10) $$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

Si può passare dalla nostra generica variabile normale **x** alla normale standardizzata **z** tramite la trasformazione

(13.11) $$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

e quindi il calcolo della probabilità che la variabile x sia nell'intervallo $x_1 \leftrightarrow x_2$,

(13.12) $$\Pr\left(x_1 \leq x \leq x_2\right) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

è pari a

(13.13) $$\Pr\left(x_1 \leq x \leq x_2\right) = \Pr\left(z_1 \leq z \leq z_2\right) = \Phi\left(z_2\right) - \Phi\left(z_1\right)$$

dove

(13.14) $$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$$

Quindi, per calcolare la probabilità nell'intervallo $x_1 \leftrightarrow x_2$, occorre

a) calcolare $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$
b) vedere nella tabella i valori di $\Phi(z_1)$ e $\Phi(z_2)$, usando la formula $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ nel caso di valori negativi di z
c) fare la differenza tra i due valori ottenuti

È importante ricordare i valori dell'integrale della densità normale in alcuni casi particolari:

Intervallo	**Probabilità**
$-\sigma \le x \le \sigma$	**0.6827**
$-2\sigma \le x \le 2\sigma$	**0.9545**
$-3\sigma \le x \le 3\sigma$	**0.9973**
$-4\sigma \le x \le 4\sigma$	**0.999936**

Cioè risulta che la probabilità di avere valori superiori in valore assoluto a una deviazione standard è minore di 1/3, di due deviazioni standard è minore di 0.05, di tre è minore di 0.003 e di quattro minore di 0.0007. Si noti la rapidità con cui diminuisce la probabilità di allontanamento dalla media.

È comoda anche la seguente tabella:

Probabilità	**Intervallo simmetrico in σ**
0.5	**0.67**
0.90	**1.64**
0.95	**1.96**
0.99	**2.58**
0.999	**3.29**

Diamo ora alcuni esercizi che si risolvono con l'uso delle tavole della distribuzione gaussiana.

1. **Supponiamo di avere delle misure di una lunghezza di valore vero 23 m affette da un errore casuale distribuito normalmente con deviazione standard di 0.09 m. Quale è la probabilità che effettuando 20 misure e facendone la media si abbia un valore maggiore di 23.05 m ?**

La deviazione standard sulla media è $\sigma_{media} = \frac{0.09}{\sqrt{20}} m \approx 0.02012$. Il valore 23.05 corrisponde a $z \approx \frac{23.05 - 23}{0.02012} \approx 2.48$. Nella tabella in fondo agli appunti (che riporta la distribuzione cumulativa), al valore 0.48 troviamo 0.993431, quindi il valore cercato è $1 - 0.993431 \approx 0.0066$. Attenzione ! Non sempre le tavole indicano la distribuzione cumulativa, quindi regolarsi di conseguenza.

2. **Osserviamo a lungo un segnale che sappiamo essere distribuito gaussianamente. Troviamo che nel 10% del tempo supera il valore 10 e nell'1% del tempo supera il valore 12. Quale è il valor medio e la deviazione standard del segnale ?**

Dalle tavole (o anche dalla tabella della pagina precedente) ricaviamo che la cumulativa vale 0.9 per 1.28σ e 0.99 per 2.33σ. Possiamo quindi scrivere il seguente sistema

$$\begin{cases} \mu + 1.28\,\sigma = 10 \\ \mu + 2.33\,\sigma = 12 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \sigma = \dfrac{12-10}{2.33-1.28} = \dfrac{2}{1.05} \approx 1.90 \\ \mu = 10 - 1.28\,\sigma = 10 - 1.28 \cdot 1.90 = 10 - 2.43 = 7.56 \end{cases}$$

Approssimazione gaussiana

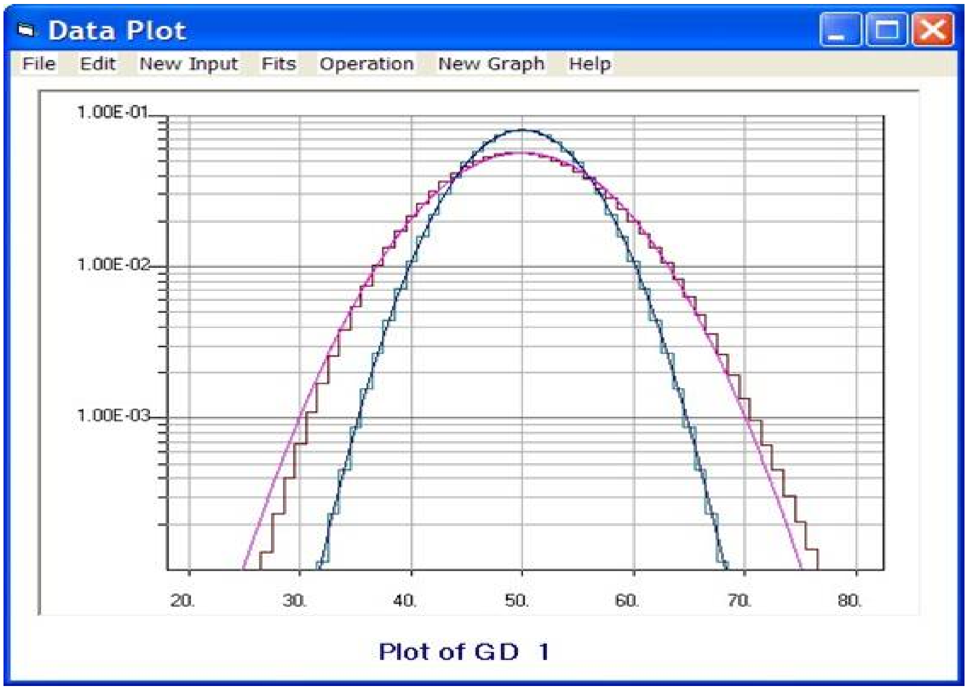
Laplace e de Moivre hanno dimostrato che, per valori alti di N, la distribuzione binomiale è approssimata dalla seguente gaussiano

$$P(k;N,p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \approx \\ \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot Np(1-p)}} e^{\frac{(k-Np)^2}{2Np(1-p)}} = G\left(k; Np, \sqrt{Np(1-p)}\right) \tag{13.15}$$

cioè una gaussiana che ha la stessa media e la stessa varianza della binomiale.

Una analoga approssimazione vale per la distribuzione di Poisson, approssimabile per alti valori di μ (> 20), con una distribuzione gaussiana con media e varianza pari a μ.

In figura sono mostrate le approssimazioni gaussiane per la binomiale con parametri N = 100, p = 0.5 e (in rosso) per la poissoniana con μ = 50.



Vediamo con un problema un uso dell'approssimazione gaussiana.

Quale è la probabilità che lanciando 6000 volte un dado (onesto) si abbia almeno 1100 volte il 6 ?

La soluzione esatta è

$$P = \sum_{k=1100}^{6000} \binom{6000}{k} \frac{5^{6000-k}}{6^{6000}}$$

non è praticabile (si provi a calcolare soltanto $\mathbf{6^{6000}}$). Sappiamo però che la distribuzione binomiale è approssimabile con una gaussiana con media $\mu = 6000 \cdot \frac{1}{6} = 1000$ e deviazione standard $\sigma = \sqrt{6000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 28.86$. Quindi semplicemente calcoliamo l'integrale della gaussiana da 1100 a 6000 (che è in pratica equivalente all'integrale da 1200 e infinito). Passando alla variabile z, detta anche in questo caso **rapporto critico**, si ha

$$z = \frac{1100 - 1000}{28.86} = \frac{100}{28.86} \approx 3.46$$

e quindi dalle tabelle si ha P =0.00027.

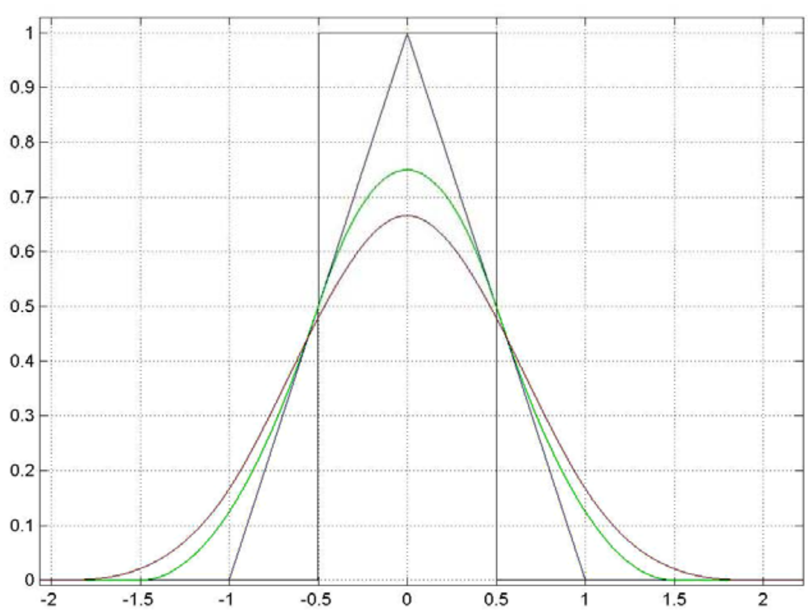
Teorema del limite centrale

La grande importanza della distribuzione normale è dovuta al **teorema del limite centrale**. Con esso si dimostra che, **se sommiamo N variabili casuali indipendenti, con distribuzioni anche diverse, ma con varianze dello stesso ordine di grandezza, se N tende all'infinito, la distribuzione della somma tende a una distribuzione gaussiana che ha valor medio la somma dei valor medi e varianza la somma delle varianze**.

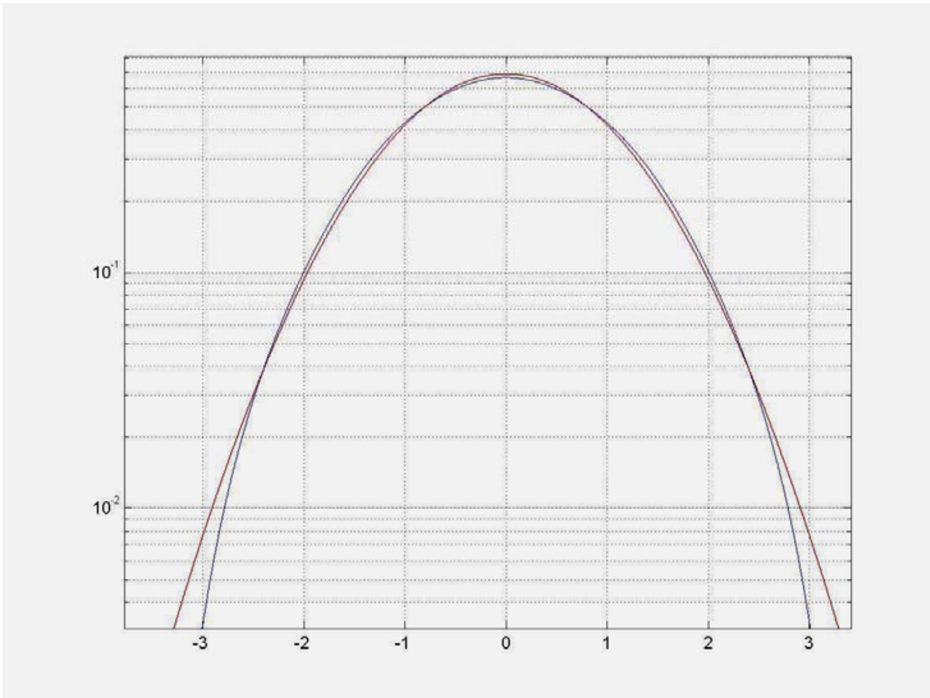
Se quindi il valore di una misura è influenzato dalla somma di tante cause indipendenti di disturbo, ciascuna delle quali ha un'ampiezza casuale (con qualsiasi legge) ed ha un effetto che si somma a quello di tutte le altre, ne deriva un errore di misura con andamento gaussiano.

Un simile meccanismo può trovarsi in tanti fenomeni naturali, per esempio la massa dei granelli di sabbia di una spiaggia, l'altezza dei ventenni maschi di una certa città, …

Per capire come funziona questo meccanismo, mostriamo il seguente grafico, in cui sono riportate le distribuzioni della distribuzione uniforme e della somma di 2, 3, 4 variabili uniformi indipendenti.



Si noti che la somma di 2 variabili uniformi dà una distribuzione triangolare, mentre sommandone di più la distribuzione appare a campana. Nella figura seguente viene presentata la differenza tra la distribuzione della somma di 5 variabili uniformi e una vera distribuzione normale (con stessa media e varianza; la gaussiana è in rosso). Si noti che la differenza è sulle code. (Le ascisse sono in unità di σ).



Un'importante corollario del teorema del limite centrale è che la somma di un qualsiasi numero di variabili gaussiane indipendenti ha una distribuzione gaussiana, con valor medio la somma dei valori medi e varianza la somma delle varianze.

Si noti che se le variabili non sono indipendenti, il corollario non è valido. Sia per esempio x una variabile gaussiana con valor medio μ e deviazione standard σ; sia y una variabile pari a –x: y è quindi anch'essa gaussiana, con valor medio -μ e deviazione standard σ e ovviamente dipendente da x. La somma delle due variabili x e y ha correttamente come valor medio la somma dei due valori medi, cioè 0, ma la varianza è nulla.

Come esercizio consideriamo il dado del paragrafo precedente. Anche questa volta facciamo 6000 lanci, però, invece di considerare il numero di volte che si è presentato il 6, consideriamo la somma di tutti i 6000 risultati. Supponiamo che anche questa volta il 6 sia uscito 1100 volte, mentre gli altri 4900 risultati si siano distribuiti equamente per gli altri 5 valori.

Il risultato della somma sarà allora:

$$1100 \cdot 6 + \frac{1+2+3+4+5}{5} \cdot 4900 = 21300$$

Per un dado "onesto" ci aspettiamo

$$\mu = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} \cdot 6000 = 3.5 \cdot 6000 = 21000$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{35}{12} \cdot 6000} \approx 132$$

quindi lo scarto è s = 21300-21000 = 300 e il rapporto critico è

$$z = \frac{s}{\sigma} \approx \frac{300}{132} \approx 2.27$$

Si noti che questo risultato è diverso (e inferiore) a quello ottenuto "testando" il numero di 6.

Distribuzione del χ^2

Se si sommano i quadrati di N varabili normali standardizzate, si ottiene una variabile casuale che chiamiamo χ^2 e che ha la densità

(13.16) $$f\left(\chi^2; N\right) = \frac{1}{2^{N/2}\Gamma(N/2)} \left(\chi^2\right)^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

dove la Γ è una complessa funzione matematica che vale

(13.17) $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad \text{e} \qquad \Gamma(1) = 1$$

e per n intero positivo

(13.18) $$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}$$

e

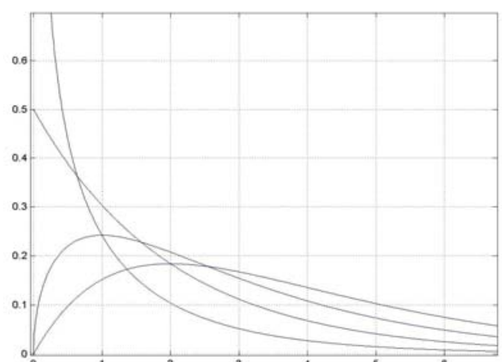
(13.19) $$\Gamma(n+1) = n!$$

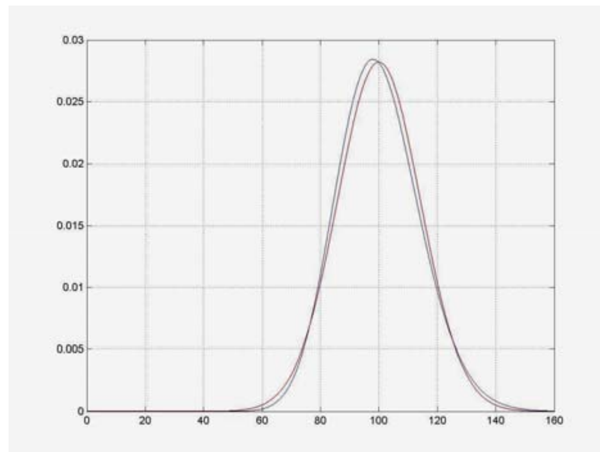
Il parametro **N** è detto "numero di gradi di libertà". Per N < 3 la distribuzione, definita solo per x non negativo, è monotona decrescente, altrimenti ha un massimo in N-2.

Il valore aspettato e la varianza sono rispettivamente **N** e **2N**; il terzo e quarto momento centrale sono $\mu_3 = 8N$ e $\mu_4 = 12 \cdot N \cdot (N+4)$. L'asimmetria è $2\sqrt{\frac{2}{N}}$ e la curtosi è $\frac{12}{N}$.

Questa distribuzione sarà usata nel cosiddetto test del χ^2 (vedi capitolo 16).

Nella prima figura ci sono le distribuzioni del χ^2 per N = 1, 2, 3, 4. Nella seconda sono confrontate la distribuzione del χ^2 con N = 100 e la gaussiana con la stessa media e la stessa varianza (in rosso la gaussiana).





Distribuzione di Cauchy

La distribuzione di Cauchy, nota in Fisica anche col nome di distribuzione di distribuzione di Breit-Wigner o di Lorentz, ha la densità

(13.20) $$f(x;\mu,d) = \frac{1}{\pi d} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x-\mu}{d}\right)^2}$$

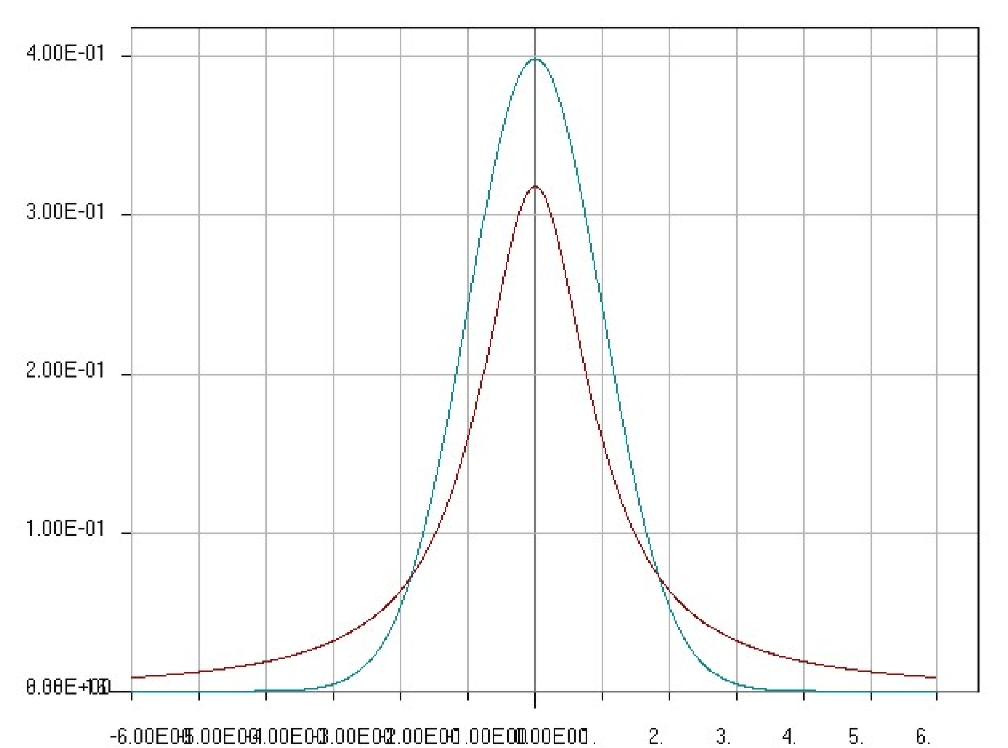
È caratterizzata da code molto pesanti e dal fatto che non ha varianza (l'integrale è divergente).

Un esempio di esperimento i cui risultati sono distribuiti secondo la distribuzione di Cauchy è il seguente. Si faccia ruotare un disco in modo che si fermi a caso con distribuzione dell'angolo uniforme tra 0 e 360 gradi. La tangente di questo angolo è distribuita secondo Cauchy, con media 0 e parametro d = 1.

Un altro caso in cui appare la distribuzione di Cauchy è quando facciamo il rapporto di due variabili gaussiane a media nulla, con eguale varianza. Anche in questo caso si ha media 0 e parametro d = 1.

Se si cerca di fare la media di un campione estratto da una distribuzione di Cauchy, si trova che comunque si fa crescere della dimensione del campione, la media non converge al valor medio. Infatti non esistendo la varianza, il teorema di Chebyshev non funziona.

In figura è riportata la distribuzione di Cauchy (in rosso) con valor medio nullo e d = 1 , in confronto con la normale standardizzata (in blu). Si noti la differente "pesantezza" delle code.



14 - Variabili casuali multiple (cenno)

- Densità di probabilità per variabili multiple
- Densità marginali e indipendenza stocastica
- Covarianza
- Coefficiente di correlazione
- Distribuzione gaussiana bivariata
- Scatter plot

Abbiamo introdotto il concetto di variabile casuale per descrivere una "popolazione" di oggetti identificabile per una caratteristica numerica. Per esempio, l'altezza dei giovani di leva, la massa delle stelle di un certo tipo, ecc.. Spesso però le caratteristiche interessanti degli oggetti in studio sono due o più, ciascuna espressa da una variabile numerica e può essere di interesse lo studio interrelato di queste caratteristiche. Per esempio, l'altezza e la lunghezza del piede dei giovani di leva, la massa e la luminosità delle stelle di un certo tipo, eccetera.
In questi casi si definisce una variabile casuale per ciascuna caratteristica e si dice che si ha a che fare con **variabili casuali multiple**.

Le variabili casuali multiple possono essere discrete e continue, e, analogamente alle variabili casuali semplici, ad esse è associata:

- (caso discreto) una probabilità per ogni combinazione dei possibili valori delle n variabili; la somma delle probabilità di tutte le combinazioni è 1

(14.1)
$$\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\ldots\sum_{i_n=1}^{N_n} p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 1$$

- (caso continuo) una densità di probabilità $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, il cui integrale, su tutte le n variabili, è 1

(14.2)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n = 1$$

In questo breve cenno ci riferiremo solo al caso continuo.

Valori aspettati

Analogamente al caso di una singola variabile, si può definire il valore aspettato di una qualsiasi funzione g delle n variabili come

(14.3) $$E\left[g(x_1, x_2, ..., x_n)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1 dx_2 ... dx_n$$

Prendiamo il semplice caso in cui la funzione **g** sia la combinazione lineare di tutte le variabili $\mathbf{x_i}$,

(14.4) $$y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

si ha

(14.5) $$E\left[y\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \cdot f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1 dx_2 ... dx_n = \sum_{i=1}^{n} a_i E\left[x_i\right]$$

quindi il valore aspettato della combinazione lineare di n variabili casuali (anche non indipendenti) è pari alla stessa combinazione lineare dei valori aspettati (come potevamo intuire, data la linearità dell'operatore E[.] "valore aspettato").

Densità marginali e indipendenza stocastica

Consideriamo per semplicità il caso in cui n sia eguale a 2 e chiamiamo x e y le due variabili. Definiamo "**densità marginali**" le funzioni

(14.6) $$f_x\left(x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

e

(14.7) $$f_y\left(y\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$

Queste due funzioni sono due densità di probabilità che possono vedersi come le densità di probabilità associate alle due variabili x e y, indipendentemente l'una dall'altra; cioè, per esempio, la prima descrive le qualità statistiche della variabile x, se non si sa niente di y.

Diciamo che due variabili x e y sono **stocasticamente indipendenti** (o, semplicemente, **indipendenti**) se tutta l'informazione su x è contenuta nella marginale $\mathbf{f_x}$ e tutta l'informazione su y nella marginale $\mathbf{f_y}$.

Se le due variabili casuali x e y sono indipendenti, si ha

(14.8) $$f\left(x, y\right) = f_x\left(x\right) \cdot f_y\left(y\right)$$

È immediato verificare che

(14.9) $$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x,y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x)\, dx$$

e analogamente

(14.10) $$E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_y(y)\, dy$$

Vediamo ora il valore aspettato del prodotto. In generale

(14.11) $$E[x \cdot y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f(x,y)\, dx\, dy$$

Se x e y sono indipendenti, si ha

(14.12) $$E[x \cdot y] = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y)\, dy = E[x] \cdot E[y]$$

Covarianza

Torniamo ora alla combinazione lineare $y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. Siano $\mu_i = E[x_i]$ e σ_i^2 le varianze delle **n** variabili $\mathbf{x_i}$. Abbiamo visto che $\mu_y = E[y] = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i$. Sviluppiamo ora l'espressione della varianza di y. Si ha

(14.13) $$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i (x_i - \mu_i)\right)^2\right] = \\ &= E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\right] = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j E\left[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\right] \end{aligned}$$

Indichiamo ora col termine **covarianza** delle variabili $\mathbf{x_i}$ e $\mathbf{x_j}$ il valore

(14.14)
$$\sigma_{i\,j} = E\left[\left(x_i - \mu_i\right)\left(x_j - \mu_j\right)\right] = E\left[x_i x_j\right] - \mu_i \mu_j$$

Si noti che $\sigma_{i\,i} = \sigma_i^2$. È immediato dimostrare che se $\mathbf{x_i}$ e $\mathbf{x_j}$ sono indipendenti la loro covarianza è nulla; altrimenti può essere positiva o negativa.

Se quindi le n variabili $\mathbf{x_i}$ sono indipendenti, la varianza della combinazione lineare si riduce a

(14.15)
$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$$

da questa equazione si ricava, per esempio, la regola sulla deviazione standard della media di misure indipendenti

(14.16)
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Tutte le covarianze delle n variabili $\mathbf{x_i}$ formano una matrice quadrata

(14.17)
$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

detta **matrice di covarianza;** sulla diagonale ha le varianze delle n variabili. Se le $\mathbf{x_i}$ sono indipendenti, la matrice è diagonale.

Possiamo quindi esprimere la varianza di y come

(14.18)
$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \sigma_{i\,j}$$

Se le $\mathbf{x_i}$ sono indipendenti, otteniamo il risultato, già anticipato,

(14.19)
$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$$

È proprio da questo risultato che si deduce la regola della somma quadratica per la propagazione delle incertezze data nel capitolo 7

(14.20)
$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 \Delta x_i^2}$$

in cui le incertezze Δx_i e Δy sono assimilate alle deviazioni standard σ_i e σ_y (f in questo caso è la funzione che definisce la misura indiretta y).

Se gli errori di misura sulle grandezze $\mathbf{x_i}$ non sono indipendenti, la propagazione dell'incertezza, assimilata ad una deviazione standard, è data dall'espressione più generale

(14.21)
$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \sigma_{i\,j}$$

Come da un campione di dati $\mathbf{x_i}$ estratti da una popolazione possiamo calcolare la varianza campionaria, così da un campione di coppie { $\mathbf{x_i}$, $\mathbf{y_i}$ } possiamo calcolare la **covarianza campionaria**

(14.22)
$$\tilde{\sigma}_{x\,y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x} \right) \left(y_i - \overline{y} \right)$$

Coefficiente di correlazione

La covarianza tra due variabili x e y, data da

(14.23)
$$\sigma_{x\,y} = E\left[\left(x - \mu_x \right) \left(y - \mu_y \right) \right]$$

indica una dipendenza tra le due variabili.
Si noti tuttavia che la condizione $\sigma_{x\,y} = 0$ è condizione necessaria, ma non sufficiente per l'indipendenza delle due variabili. Per illustrare il caso di due variabili scorrelate, ma non indipendenti, si consideri le seguenti due variabili casuali:

1. **x** una qualsiasi variabile casuale, comunque distribuita, per semplicità a media nulla
2. **y** una variabile casuale che ha probabilità 0.5 di valere x e 0.5 di valere –x

y è evidentemente dipendente da x, ma $\sigma_{xy} = E\left[x \cdot y \right] = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x^2 - \frac{1}{2} \cdot \sigma_x^2 = 0$.

Il valore della covarianza $\boldsymbol{\sigma_{xy}}$ dipende anche dalle varianze di x e y. Per indicare questo tipo di dipendenza in una forma indipendente dalla varianza di x e y (e da eventuali fattori di amplificazione), si è introdotto un parametro adimensionale, il **coefficiente di correlazione**

(14.24)
$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Questo è un numero compreso tra -1 e 1.

Una caratteristica importante è che, se definiamo due nuove variabili $\xi = a \cdot x + b$ e $\eta = c \cdot y + d$, per qualsiasi valore di a, b, c e d (purché a e c siano diversi da 0), il coefficiente di correlazione tra le due nuove variabili ξ e η è eguale a quello tra x e y.

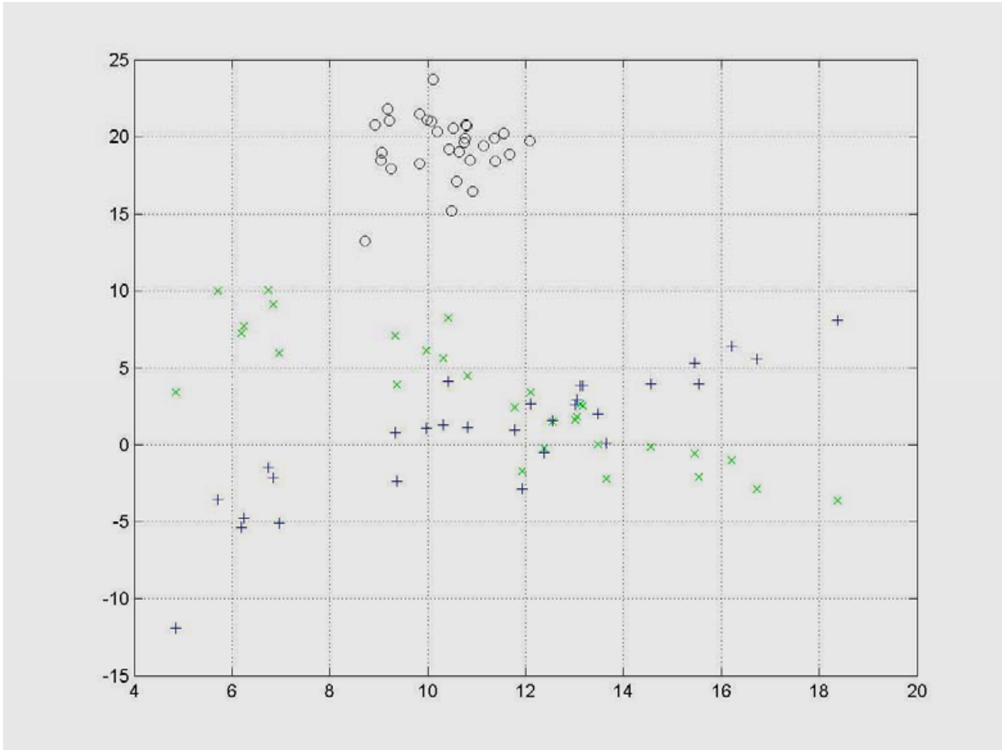
Il coefficiente di correlazione evidenzia una **relazione lineare** tra le variazioni percentuali della variabile x e le variazioni percentuali della variabile y.

Se il coefficiente di correlazione è 1 o -1, la relazione lineare tra le due variabili è deterministica e si può ricavare l'una dall'altra, anche se ciascuna può vedersi come una variabile casuale. Per esempio, si abbia una popolazione di rondelle di ferro, perfette, di varie dimensioni, con il diametro **d** distribuito secondo una gaussiana di valor medio 15 mm e deviazione standard 2 mm. La circonferenza **c** sarà anch'essa una variabile casuale gaussiana con valor medio $30 \cdot \pi$ e deviazione standard $4 \cdot \pi$. Le rondelle possono essere descritte da questi 2 caratteri d e c, ma la correlazione tra essi è 1, quindi ne basta uno per ricavare l'altro con assoluta precisione.

A partire da un campione di coppie { $\mathbf{x_i}$, $\mathbf{y_i}$ } si può calcolare il coefficiente di correlazione campionario, usando la covarianza campionaria e le deviazioni standard campionarie, come

(14.25)
$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{\sigma}_{xy}}{\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y}$$

In figura sono riportati tre campioni di coppie di dati, tratte da tre diverse popolazioni. I dati indicati con i "+" blu hanno coefficiente di correlazione positivo (circa 0.87), quelli indicati con gli "x" verdi lo hanno negativo (circa -0.87) e quelli indicati con gli "o" neri sono scorrelati (anche se, a causa di fluttuazioni casuali, quelli qui rappresentati presentano un piccolo coefficiente di correlazione di circa 0.04).



Distribuzione gaussiana bivariata

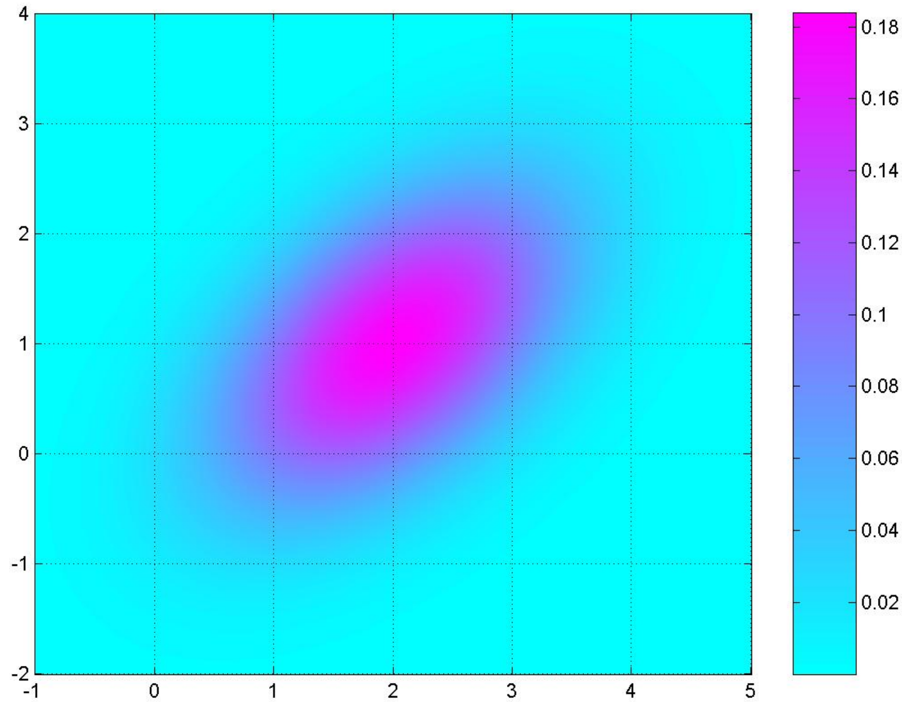
Come esempio di distribuzione di più variabili diamo il caso della distribuzione normale in due variabili, la cui densità di probabilità è

(14.26)

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)} \cdot \left(\frac{\left(x-\mu_x\right)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho\left(x-\mu_x\right)\left(y-\mu_y\right)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{\left(y-\mu_y\right)^2}{\sigma_y^2} \right) \right]$$

espressa in funzione dei parametri μ e σ delle due variabili e del coefficiente di correlazione ρ tra di esse.

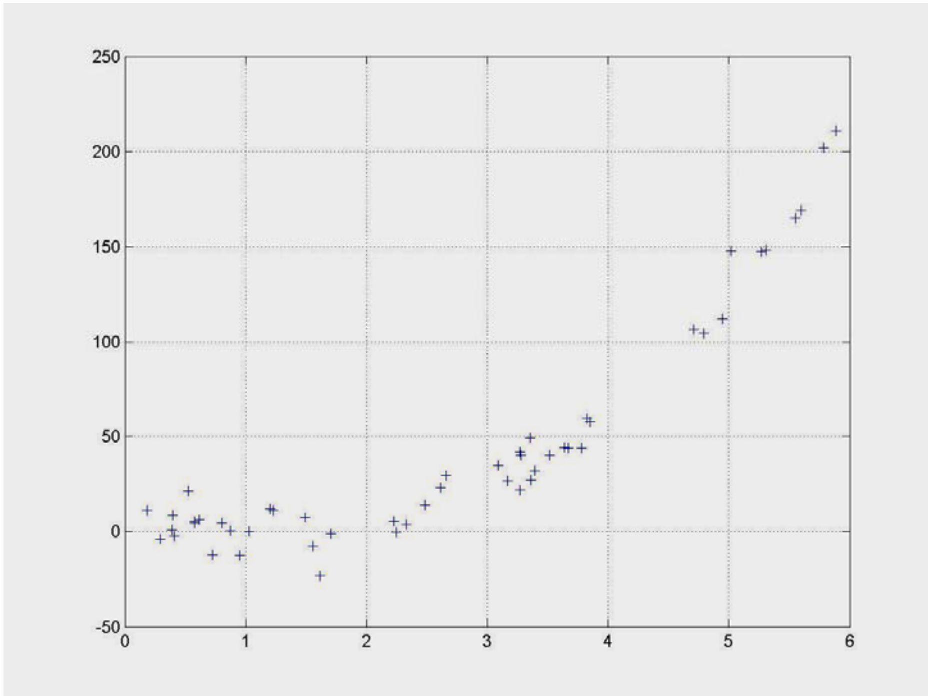
In figura è mostrata (in pianta) una distribuzione gaussiana bivariata, rappresentante la distribuzione della statura (x) e della lunghezza del piede (y) in una popolazione. È evidente la correlazione.



"Scatter plot"

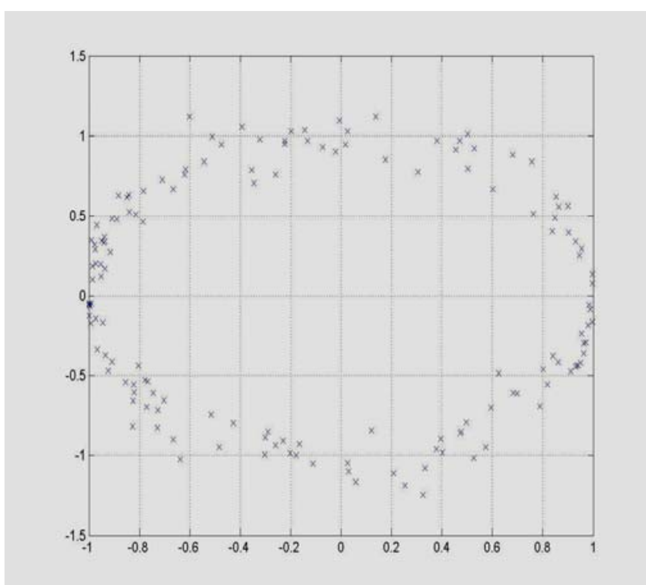
Quando si ha a che fare con due caratteri di una popolazione, l'uso di diagrammi come il precedente, chiamato **scatter plot**, può essere molto proficuo e più ricco di informazioni del semplice coefficiente di correlazione.

Per esempio nel seguente grafico, c'è un'evidente relazione tra la x e la y (una cubica), ma non lineare. I dati tuttavia risultano correlati lo stesso.

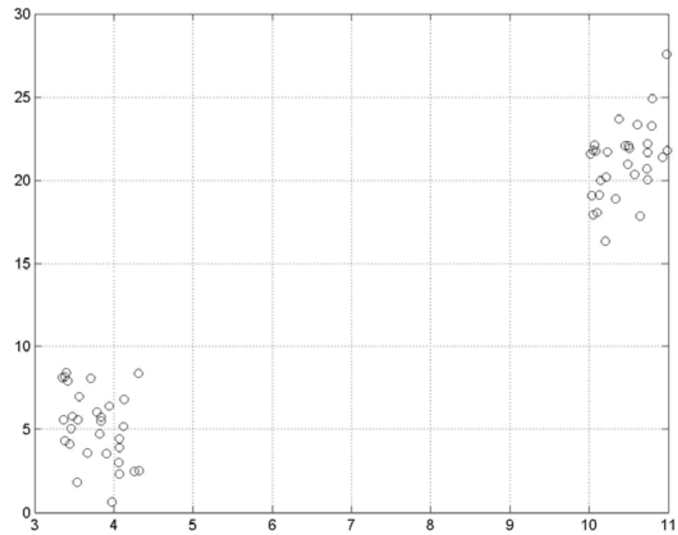


In questo caso si possono mettere a punto metodi di calcolo più complessi della valutazione campionaria del coefficiente di correlazione per descrivere questa più complessa dipendenza.

Nella seguente figura invece, sebbene ci sia un'evidente relazione tra le x e le y, quindi x e y non sono indipendenti, il coefficiente di correlazione è nullo (si può vedere che in certe zone è positivo, in altre negativo, ma in totale è nullo).



In quest'ultima figura, infine, vediamo che sebbene ci sia una forte correlazione tra l'insieme dei dati, in effetti essi sono tratti molto probabilmente da due popolazioni ben distinte (all'interno delle quali è molto ridotta se non nulla la correlazione tra i due caratteri). Lo scatter plot evidenzia chiaramente questa situazione.



15 - Stima di parametri

- L'inferenza statistica
- Esperimenti controllati ed esperimenti osservativi
- Stima del valor medio
- Livello di fiducia e intervallo di fiducia
- Stima della varianza
- Stima dei parametri di una retta sperimentale
- Media pesata

Cenno all'inferenza statistica

L'inferenza è il processo con cui, a partire da dati sperimentali, valutiamo ("**stimiamo**") il valore di uno o più parametri di nostro interesse, oppure **decidiamo** sulla correttezza di certe ipotesi. Se i dati sperimentali sono estratti come campione da una popolazione o se essi sono affetti da errori casuali, parliamo di inferenza statistica.

Nelle scienze sperimentali esistono due distinte procedure sperimentali:

- gli **esperimenti controllati** (o "di laboratorio"; qualcuno li chiama "galileiani"), in cui decidiamo alcuni parametri sperimentali e ne misuriamo altri. Per esempio nell'esperimento della molla, per calcolare la costante elastica **k** abbiamo deciso i valori di massa con cui caricavamo la molla e misuravamo il periodo. In questo caso usiamo l'inferenza statistica a causa delle incertezze di misura.

- gli **esperimenti osservativi**, in cui gli oggetti della sperimentazione non sono sotto il nostro controllo e quindi noi possiamo limitarci a misurarne ("osservarne") caratteristiche "campionarie" ed inferire leggi tra di esse. È questo per esempio il caso dell'astrofisica (c'è qualche difficoltà a portare in laboratorio una stella e a controllarne qualche caratteristica, per esempio la massa). In questo caso usiamo l'inferenza statistica sia perché operiamo su un campione di una popolazione, sia perché sono presenti incertezze di misura, sia perché ci può essere l'influenza di altri fattori non sotto il nostro controllo).

In generale, supponiamo di dover stimare un parametro θ da un campione sperimentale $\left\{x_{1,} x_2, ..., x_n\right\}$, ottenendo la **stima** $\hat{\theta}$ (d'ora in poi indicheremo con la cuspide "^" il valore "stimato" di un parametro). Realizziamo ciò tramite una funzione f

(15.1) $$\hat{\theta} = f\left(x_{1,} x_2, ..., x_n\right)$$

In linea di principio, la funzione f può essere qualsiasi: il problema è avere un buon "stimatore" (ancora meglio, lo stimatore "ottimo").

Il valore stimato $\hat{\theta}$ può essere visto come una variabile casuale. Alcune "qualità" auspicabili di uno stimatore sono le seguenti:

- la **consistenza**, cioè se, al tendere ad infinito della dimensione n del campione, il valore della stima tende al valore del parametro. Questa è, ovviamente, una qualità fondamentale.
- la **correttezza**, o assenza di **distorsione** (bias in inglese), se $E\left[\hat{\theta}\right]=\theta$.
- l'**efficienza**, cioè quanto rapidamente $\hat{\theta}$ converge a θ al crescere di n..
- la **robustezza**, cioè quanto le qualità di uno stimatore sono indipendenti dalla distribuzione dei dati a cui è applicato.

.

Per "costruire" buoni stimatori si utilizzano vari metodi, per esempio il **metodo dei minimi quadrati**, il **metodo della massima verosimiglianza** o il **metodo dei momenti**. Nel presente corso introduttivo, non svilupperemo questo argomento.

Stima del valor medio

Supponiamo di dover eseguire la misura di una grandezza fisica. Facciamo ciò eseguendo una certa procedura sperimentale e la ripetiamo più volte. Partendo dai risultati di queste operazioni ripetute, ci possiamo chiedere:

- quale è il valore vero della misura della grandezza in esame ?
- quale è l'incertezza del valore che forniamo ?
- quale è l'intervallo di fiducia, cioè l'intervallo, relativo ad una certa probabilità, che possiamo dire contenga il valore vero, con quella probabilità ?

Sin dall'inizio del corso abbiamo proposto come buon stimatore del "valore vero" di un misurando (in linguaggio statistico, il "valore aspettato"), in presenza di errori casuali, la media dei risultati di successive misure. Ora possiamo chiederci: è questo un buon stimatore ? Verifichiamone la correttezza:

(15.2)
$$E\left[\overline{x}\right]=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[x_i\right]=\mu$$

quindi, come speravamo è corretto (e quindi anche consistente). Non discutiamo qui altre qualità (alcune delle quali dipendono dalla distribuzione degli errori casuali, che non è detto che siano sempre gaussiani).

Abbiamo già ricavato l'incertezza sulla media che, se la rappresentiamo con la deviazione standard, è $\sigma_{\overline{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$.

Se stabiliamo una probabilità φ, che chiamiamo il **livello di fiducia** o **livello di confidenza**, quale è, a partire dalle nostre misure, l'intervallo **(a,b)** (detto **intervallo di confidenza**) entro cui sta il valore vero ?
Supponiamo che i nostri errori siano gaussiani e che conosciamo la loro deviazione standard σ_x. Allora, trovato con le tavole il valore **z** della variabile standardizzata che corrisponde ad un intervallo simmetrico di probabilità φ, diciamo che l'intervallo relativo al livello di fiducia φ è

(15.3) $$\left(\overline{x} - z \cdot \sigma_{\overline{x}}, \overline{x} + z \cdot \sigma_{\overline{x}}\right)$$

Nel caso che la distribuzione non sia gaussiana, se il numero di misure è abbastanza elevato, per il teorema del limite centrale questa formula è una buona approssimazione.

Se la deviazione standard non è nota, la si può stimare (si veda il prossimo paragrafo), ma in questo caso il calcolo dell'intervallo di fiducia è più complesso (occorre introdurre la distribuzione t di Student, argomento che esula dal programma di questo corso introduttivo (si veda il cenno al capitolo 20); è questa una distribuzione con un parametro detto numero dei gradi di libertà, che "parte" da quella di Cauchy e "arriva" asintoticamente a quella di Gauss); tuttavia, se il campione è abbastanza numeroso la formula che abbiamo dato è una buona approssimazione.

Una volta stimato l'intervallo di confidenza (dato un livello di fiducia di nostra scelta), possiamo decidere se i nostri risultati sperimentali sono compatibili con una aspettativa teorica (a priori). Se il valore teorico è entro l'intervallo di fiducia, allora diciamo che le nostre misure sono compatibili con esso, o anche che l'esperimento conferma la teoria, altrimenti lo dobbiamo escludere (e dobbiamo cambiare teoria o correggere errori sperimentali; c'è anche l'eventualità che siamo di fronte a una fluttuazione statistica: in questo caso se ripetiamo l'esperimento dovremmo avere risultati compatibili.

Nota: Il livello di fiducia indica quanto siamo al sicuro da inevitabili fluttuazioni. Porre il livello di fiducia **p** per esempio a **0.95** significa che questa è la probabilità di non essere tratti in errore dalle fluttuazioni: **ma con questo livello di fiducia il 5 % degli sperimentatori che operano correttamente daranno il risultato sbagliato.** Ovviamente miglioriamo le cose alzando il livello di fiducia **p**, per esempio, a **0.99**: ma in questo caso nell' **1 %** dei casi dei buoni sperimentatori daranno dei risultati errati. Se si ripete l'esperimento però, le cose migliorano: la probabilità di riavere la fluttuazione ingannevole due volte di seguito è molto bassa (in genere inferiore a $\left[1-(1-p)^2\right]$).

Il livello di fiducia è un parametro che qualifica probabilisticamente l'incertezza di una misura. Una misura viene quindi descritta da tre numeri: il <u>valore stimato</u>, l'<u>incertezza</u> su tale valore, che determina un intervallo, e il <u>livello di fiducia</u> che associa una probabilità a questo intervallo.

Attenzione ! spesso anche il valore teorico ha un'incertezza. In tal caso dobbiamo calcolare gli intervalli di confidenza sia per il valore teorico ($\mathbf{v_T}$) che per il valore sperimentale ($\mathbf{v_S}$). In effetti la cosa si semplifica se le due incertezze sono entrambe assimilabili a due deviazioni standard (di distribuzioni gaussiane). Allora possiamo costruire la differenza $\mathbf{d = v_S - v_T}$. Nell'ipotesi che la teoria sia in accordo con l'esperimento, ci aspetteremmo d = 0, con una varianza pari alla somma delle due varianze. Quindi, dato il nostro livello di fiducia, possiamo costruirci l'intervallo di fiducia (che sarà simmetrico rispetto a 0): se il d trovato è dentro questo intervallo, allora la teoria è in accordo con l'esperimento, altrimenti no.

Stima della varianza

Nel capitolo 5 abbiamo dato questa definizione di varianza campionaria

(15.4) $$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

ma è questo un buon stimatore della varianza della popolazione da cui il campione $\{x_i\}$ è estratto ? Prendiamone il valore aspettato

(15.5) $$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(x_i - \mu\right) - \left(\overline{x} - \mu\right)\right\}^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu\right)^2 - 2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu\right)\left(\overline{x} - \mu\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{x} - \mu\right)^2\right]$$

ora per il termine misto si ha

(15.6) $$2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu\right)\left(\overline{x} - \mu\right) = 2\cdot\left(\overline{x} - \mu\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu\right) = 2\cdot n\cdot\left(\overline{x} - \mu\right)^2$$

e quindi, ricordando che la varianza sulla media è n volte minore della varianza sul singolo,

(15.7) $$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu\right)^2 - \left(\overline{x} - \mu\right)^2\right] = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2$$

Come si vede il valore aspettato dello stimatore del capitolo 5 non è la varianza della popolazione. Quindi questo stimatore è distorto, anche se per grandi valori di n, la distorsione è molto piccola. Esso dà mediamente un valore un po' più piccolo di quello vero. Preferiamo perciò, come stimatore della varianza, il seguente

(15.8) $$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

che è corretto ("unbiased", in inglese).

Se conosciamo il valore aspettato μ, lo stimatore

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \tag{15.9}$$

è corretto.

Il calcolo della varianza sulla varianza campionaria è piuttosto complicato. Diamo qui, per riferimento, il risultato

$$\sigma_{\hat{\sigma}^2}^2 = \frac{1}{n}\left(\mu^{(4)} - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right) \tag{15.10}$$

dove $\mu^{(4)}$ è il momento centrale del quarto ordine. Se la distribuzione è gaussiana, si ha

$$\sigma_{\hat{\sigma}^2}^2 = \frac{2 \cdot \sigma^4}{n-1} \tag{15.11}$$

e la deviazione standard (che può essere presa come "incertezza" nella stima della varianza)

$$\sigma_{\hat{\sigma}^2} = \sigma^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{n-1}} \tag{15.12}$$

L'incertezza relativa sulla varianza è quindi $\sqrt{\frac{2}{n-1}}$ e, usando la solita regola per la propagazione dell'incertezza percentuale, l'incertezza relativa sulla deviazione standard è la metà della precedente, cioè $\sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}$.

Stima dei parametri di una retta sperimentale ("fit lineare")

In un grafico che rappresenta punti sperimentali che collegano due parametri con dei punti allineati affetti da errori casuali (per esempio la misura del periodo al quadrato (T^2) e la misura della massa appesa (M) nell'esperimento della molla), si vogliano stimare i parametri della retta che meglio li descrive e valutare l'incertezza su di essi.

È questo il più semplice caso di "fit" di dati sperimentali ed è detto il problema del fit lineare.

Nel caso più generale, il problema è quello di trovare i parametri di una funzione di un certo tipo in modo da approssimare al meglio i dati sperimentali. Gauss, che doveva trovare i parametri orbitali del pianetino Cerere (scoperto nel 1801 a Palermo da Piazzi, ma poi "perso"), a partire dalle osservazioni, introdusse, per questo tipo di problemi, il **principio dei minimi quadrati**.
Limitandoci al nostro semplice caso lineare. Supponendo che tutte le misure abbiano la stessa incertezza, esso stabilisce che la migliore retta $y = m \cdot x + q$ è quella in cui la somma dei quadrati tra i valori sperimentali e quelli della retta sia minima.

Supponiamo di avere le **n** coppie di misure ($\mathbf{x_1,y_1}$), ($\mathbf{x_2,y_2}$), …, ($\mathbf{x_n,y_n}$), dove le misure x hanno errore trascurabile e le misure y hanno errore gaussiano con media 0 e deviazione standard σ ; per ciascuna di queste coppie scriviamo l'equazione

(15.13) $$y_i = m \cdot x_i + q + \varepsilon_i$$

dove ε_i è l'errore sulla misura y_i. La somma dei quadrati degli errori è

(15.14) $$n \cdot \overline{\varepsilon^2} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - m \cdot x_i - q \right)^2$$

imponiamo quindi le condizioni per il minimo (annullamento della derivata prima)

(15.15) $$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial m} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial q} = 0$$

e risolviamo il sistema. Si trova per la stima di **m**

(15.16) $$\hat{m} = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{\hat{\sigma}_{xy}}{\Delta}$$

dove

(15.17) $$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad \overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \overline{x \cdot y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Notare che il numeratore è la covarianza campionaria di x e y ; il denominatore $\Delta = \overline{x^2} - \overline{x}^2$, detto braccio, ha la forma di una varianza campionaria, anche se in effetti non lo è, perché x non è una variabile casuale (sono valori scelti da noi): essa comunque misura la "larghezza" dell'insieme dei dati x. Quindi, come è intuitivo, più è larga la base dei dati x, migliore è la stima della pendenza della retta.

Per ottenere la stima di q facciamo

(15.18) $$\hat{q} = \overline{y} - \hat{m} \cdot \overline{x}$$

Per le incertezze, in forma di deviazione standard, abbiamo

(15.19) $$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n \cdot \Delta}} \qquad \text{e} \qquad \sigma_q = \sigma_m \cdot \sqrt{\overline{x^2}}$$

Attenzione ! queste formule sono ricavate nel caso in cui sono verificate le due ipotesi

a) siano uguali tutte le incertezze sulle misure y
b) siano trascurabili le incertezze sulle x

Se non è valida la prima condizione, possiamo ricavare altre espressioni per le stime e le loro incertezze, basate sul "principio del minimo χ^2"; rimandiamo per queste espressioni, molto più complesse, a testi più avanzati. Se non è valida la seconda condizione, il problema è molto più complesso (diventa non lineare) e si può risolvere o con trucchi (riportando per esempio l'incertezza sulla x sulla variabile y) o con procedure di ottimizzazione ricorsiva.

Dopo aver presentato la soluzione matematica a questo problema, vediamo come si possa fare "a mano" una stima dei coefficienti della retta che rappresenta dei dati sperimentali disposti su un grafico (vedi capitolo 6):

- con un righello trasparente tracciare la retta che si ritiene approssimi meglio i dati sperimentali. Si scelgano poi su di essa due punti abbastanza distanti definiti dalle coppie di coordinate ($\mathbf{x_1},\mathbf{y_1}$) e ($\mathbf{x_2},\mathbf{y_2}$). Il coefficiente angolare **m** si ottiene da

(15.20) $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

  mentre il **q** è il valore dell'asse delle ordinate per cui passa la nostra retta.

- per valutare l'incertezza su **m**, tracciare le due rette di minima e massima pendenza che però a nostro giudizio descrivono ancora ragionevolmente bene i dati; valutiamo quindi i coefficienti angolari $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$ di queste due rette e indichiamo come incertezza su **m**

(15.21) $$\Delta m = \frac{m_2 - m_1}{2}$$

Questa procedura manuale va in genere evitata quando si ha la possibilità di usare la più raffinata procedura matematica; tuttavia può essere utile per evidenziare eventuali punti fuori allineamento (forse errati). Può comunque essere una semplice verifica della corretta applicazione dell'algoritmo dei minimi quadrati.

Media pesata

Se si hanno varie valutazioni della misura di una grandezza, con incertezze differenti, come possiamo utilizzare questi risultati per stimare al meglio il valore vero della grandezza ?

Per esempio, nell'esperienza della misura della densità (vedi capitolo 18) ciascun gruppo ha ottenuto risultati leggermente diversi per i vari corpi in esame e con le varie procedure: si possono mettere insieme i vari risultati per avere una migliore stima della densità del materiale in esame (l'alluminio) ? Oppure, possiamo utilizzare tutte le misure di densità fatte in quella esperienza di laboratorio da tutti i gruppi di studenti per avere una migliore stima della densità ?

La risposta è sì. Supponiamo di avere **n** misure indipendenti $\mathbf{m_i}$, di una grandezza **M**, ciascuna con incertezza (assimilata a una deviazione standard) $\mathbf{s_i}$, e gli errori di misura siano normali. Applichiamo il **principio della massima verosimiglianza** (che esula dal programma) e troviamo

(15.22)
$$\hat{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{s_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i^2}}$$

Questa può essere vista come una media pesata con pesi

(15.23)
$$a_i = \frac{\frac{1}{s_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i^2}}$$

ovviamente i pesi sono maggiori per le misure con incertezze minori. Si noti che il risultato non cambia se tutte le incertezze sono moltiplicate per uno stesso fattore (le $\mathbf{a_i}$ sono le stesse).

L'incertezza è data da

(15.24)
$$\Delta M = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i^2}}}$$

Se le incertezze sono tutte eguali, si ricava la solita espressione per l'incertezza delle misure ripetute.

16 - Test statistici

- Test di ipotesi
- Livello di significatività
- Test di verifica di un valore teorico
- Test di consistenza tra due misure
- Test del χ^2
- Gradi di libertà

Un problema centrale che si pone negli esperimenti scientifici è **decidere** se i risultati di un certo esperimento sono in accordo con la teoria. Per esempio, la traiettoria osservata di un corpo in caduta libera è in accordo con la legge di gravitazione ? I risultati di un esperimento con il pallinometro sono in accordo con la formula teorica della distribuzione aspettata delle frequenze dei vari bin ?

In altri casi sperimentali, potremmo voler **testare** se ci sono differenze in due diverse procedure sperimentali, oppure **verificare** l'efficacia di un certo trattamento (per esempio l'assunzione di un farmaco per la cura di una certa malattia).

Analoghe domande si possono porre per esempio nel controllo di qualità dei prodotti (i pneumatici prodotti da un certo stabilimento hanno una durata maggiore di quelli di un altro ?) o in altri campi della tecnica.

Questo tipo di problemi, che implicano una decisione (sì o no) è formalizzato nella teoria statistica dei test d'ipotesi, che è un altro aspetto dell'inferenza statistica. In questa teoria vengono prima di tutto formulate due ipotesi: l'ipotesi $\mathbf{H_0}$, detta **ipotesi nulla**, e l'ipotesi $\mathbf{H_1}$, detta **ipotesi alternativa**. Per esempio, l'ipotesi $\mathbf{H_0}$, che in genere è quella più precisamente definita, nel caso della verifica sperimentale di una teoria, potrebbe essere che ci sia perfetto accordo tra teoria ed esperimento (errore nullo); nel caso del farmaco potrebbe essere che non ci sia effetto (effetto nullo).

Lo scopo di un test di ipotesi è valutare se c'è sufficiente evidenza statistica per accettare l'ipotesi $\mathbf{H_0}$. Il risultato del test, cioè la nostra **decisione**, è sempre o l'accettazione o il rifiuto dell'ipotesi. Nel far ciò possiamo aver fatto la scelta giusta o compiuto un errore. Abbiamo il seguente schema:

	Situazione reale	
Decisione statistica	**H_0 vera**	**H_0 falsa**
Accettare H_0	$P = 1-\alpha$	**Errore di secondo tipo:** $P = \beta$
Rifiutare H_0	**Errore di primo tipo:** $P = \alpha$	$P = 1-\beta$

Vediamo che si possono commettere due tipi di errori:

- il primo, a cui è associata la probabilità α , chiamata **livello di significatività** del test, capita quando rifiutiamo un'ipotesi H_0 vera.
- il secondo, a cui è associata una probabilità β , capita quando accettiamo come buona una ipotesi H_0 falsa.

Notiamo che $1-\alpha$ è equivalente al livello di fiducia φ introdotto nel capitolo precedente parlando della stima dell'intervallo di fiducia.

Possiamo decidere di diminuire la probabilità di un certo tipo di errore (cambiando la soglia di decisione), ma così facendo aumentiamo la probabilità dell'errore dell'altro tipo.

La scelta della soglia quindi va fatta sulla base dei "costi" che ciascun tipo di errore ci procura.

Nella costruzione di un test statistico talora non si considerano gli errori di secondo tipo.

Test di consistenza con un valore teorico

Supponiamo di avere una misura sperimentale **m**, con incertezza **Δm** (rappresentante la deviazione standard dell'errore casuale) e vogliamo decidere se è consistente con un valore teorico **t** (con incertezza trascurabile). Definiamo *a priori* un livello di fiducia φ (o, equivalentemente, un livello di significatività $\alpha = 1-\varphi$), e calcoliamo (con le tavole dell'integrale della gaussiana) il semi-intervallo di fiducia relativo z_φ .
Valutiamo quindi

$$z = \frac{|m-t|}{\Delta m} \tag{16.1}$$

e decidiamo sul superamento del test sulla base del valore di $z_\varphi - z$: se è positivo il test è superato (accettiamo l'ipotesi), altrimenti rigettiamo l'ipotesi.

Test di consistenza tra due valori sperimentali

Supponiamo di avere due misure $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$ con incertezze relativamente $\mathbf{\Delta m_1}$ **e** $\mathbf{\Delta m_2}$ (o analogamente un valore sperimentale e uno teorico con incertezza non trascurabile). Ci domandiamo se sono compatibili, avendo definito un certo livello di fiducia.
Per costruire il test, costruiamo una nuova grandezza $\mathbf{d = m_1 - m_2}$ che ha incertezza

$\Delta d = \sqrt{\Delta m_1^2 + \Delta m_2^2}$. Se le due misure sono consistenti, il valore aspettato di **d** è 0. Costruiamo quindi l'intervallo di fiducia relativo al livello di fiducia e al **Δd**, simmetricamente a **d**, e verifichiamo se il valore 0 è interno od esterno a questo intervallo: nel primo caso accettiamo l'ipotesi, altrimenti la rigettiamo.

Test del χ^2

Se la verifica di un'ipotesi teorica corrisponde alla verifica della consistenza di più valori sperimentali, ognuno con la sua incertezza, con altrettanti valori teorici, è molto usato il **test del** χ^2 (chi quadro).

Supponiamo per esempio di avere un grafico (x, y), in cui, in corrispondenza di n punti $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sulle ascisse, siano riportati n punti sperimentali $\left\{y_1^{(S)}, y_2^{(S)}, \ldots, y_n^{(S)}\right\}$, con incertezze "gaussiane" $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$, e si voglia testare la consistenza tra essi e gli n valori teorici $\left\{y_1^{(T)}, y_2^{(T)}, \ldots, y_n^{(T)}\right\}$. Supponiamo inoltre che gli errori di misura siano indipendenti e che non siano state ricavate informazioni dai dati sperimentali per calcolare i valori teorici. In questo caso costruiamo la variabile

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(y_i^{(S)} - y_i^{(T)}\right)^2}{\sigma_i^2} \tag{16.2}$$

Notiamo che gli elementi della sommatoria sono quadrati di variabili normali standardizzate, quindi la variabile da noi costruita ha la distribuzione del χ^2 con **n** gradi di libertà. Se quindi definiamo un livello di fiducia φ (o, equivalentemente, un livello di significatività $\alpha = 1 - \varphi$), possiamo calcolare quale sia il valore limite χ^2_{MAX} tale che

$$\varphi = \int_0^{\chi^2_{MAX}} f_{\chi^2}^{(n)}(x)\, dx \tag{16.3}$$

dove $f_{\chi^2}^{(n)}(\cdot)$ è la densità di probabilità del χ^2 con n gradi di libertà. I valori di χ^2_{MAX} per un dato valore del livello di fiducia e per un dato numero di gradi di libertà, sono tabulati su tavole come quella in appendice a questi appunti.

Se per calcolare i valori teorici abbiamo dovuto valutare **m** parametri indipendenti di un'equazione a partire dagli **n** numeri sperimentali, allora si abbassa il numero di gradi di libertà a **n – m** e quindi dobbiamo usare la distribuzione del χ^2 con n – m gradi di libertà.

Un caso particolare di test del χ^2 è quello che si usa per testare la consistenza tra una distribuzione teorica e un istogramma di frequenza.

A partire dalla distribuzione teorica e dal numero di dati istogrammati, calcoliamo i valori teorici delle frequenze degli **m < n** bin, a partire dalle probabilità $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ e moltiplicandole per n; siano questi valori teorici $\{h_1^{(T)}, h_2^{(T)}, ..., h_m^{(T)}\}$. Siano invece $\{h_1^{(S)}, h_2^{(S)}, ..., h_m^{(S)}\}$ le frequenze trovate sperimentalmente per ciascun bin, istogrammando gli n dati. Si noti che il parametro n lo possiamo ricavare sommando tutte le frequenze ottenute per i vari bin, quindi il numero di gradi di libertà si riduce di 1. Ulteriori riduzioni possono aversi se ci occorrono altri parametri per calcolare le $\mathbf{p_i}$.

Notiamo inoltre che le distribuzioni della frequenza nell'i-esimo bin è distribuita secondo una distribuzione binomiale con parametri **n** e $\mathbf{p_i}$, e, se i bin sono tanti, $\mathbf{p_i}$ è piccolo e quindi la binomiale si può approssimare, in tal caso, ad una poissoniana; quindi la varianza è proprio $h_i^{(T)}$. Costruiamo quindi la variabile

(16.4)
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(h_i^{(S)} - h_i^{(T)}\right)^2}{h_i^{(T)}}$$

(se i bin sono pochi, l'approssimazione poissoniana porta a sottovalutare il valore di χ^2).

Attenzione però ! Abbiamo visto che le fluttuazioni casuali (le differenze tra $h_i^{(S)}$ e $h_i^{(T)}$ sono distribuiti secondo Poisson, mentre per poter usare il test del χ^2 ed avere la distribuzione del χ^2 sulla variabile costruita, queste poissoniane devono essere approssimabili da gaussiane, cosa che capita se il loro μ è abbastanza elevato (per esempio > 20). Ma ciò, se può essere verificato per i bin centrali, quasi sempre non lo è per quelli estremi che sono tipicamente più poveri. Possiamo allora seguire una delle seguenti due strade:

- trascuriamo i bin periferici (in tal caso il numero di gradi di libertà è dato semplicemente dal numero dei bin considerati)
- "accorpiamo" (cioè sommiamo i loro contenuti) più bin insieme (non necessariamente adiacenti); in questo caso il numero di gradi di libertà si calcola nel modo normale.

17 - La misura

L’argomento principale di questo corso è stato la **misura di una grandezza fisica**. Questa può essere ottenuta **direttamente** tramite uno strumento di misura o **indirettamente** tramite una formula e la conoscenza di una o più misure di altre grandezze. Rivediamo ora brevemente la misura in modo più maturo, alla luce dei concetti sviluppati.

Il processo di misura non dà (a parte eccezioni) il valore vero della grandezza (che si suppone esista) a causa di inevitabili **errori di misura**, che abbiamo così schematizzato:

- **errore di sensibilità** (o **errore di lettura**), spesso detto **errore di quantizzazione** nel caso degli strumenti digitali, definito come la minima variazione della grandezza apprezzabile in modo oggettivo. Abbiamo visto che questo può essere schematizzato come una variabile casuale con distribuzione uniforme e in genere di essa si dà la semi-larghezza. Se l’errore casuale è trascurabile (misure di bassa sensibilità), se ripetiamo la misura l’errore di lettura è sempre lo stesso. Se invece la ripetizione della misura dà risultati diversi (a causa dell’errore casuale), anche l’errore di lettura è diverso per ogni ripetizione della misura e quindi farne la media lo riduce. In tale caso, come sempre che si debbano mettere insieme errori di lettura ed errori casuali (come capita in certe misure indirette) è bene esprimere l’errore di lettura in termini della sua deviazione standard (ciò si ottiene dividendo la semi-larghezza per $\sqrt{3}$): in tal modo tutti gli errori sono espressi in termini di deviazione standard.

- **errore sistematico**, dovuto soprattutto ad errata taratura degli strumenti o a perturbazione della misura da parte dello strumento. Questo errore, per una data misura con un dato strumento, è sempre lo stesso. Parte di esso può essere corretto, ma parte no, e questa parte può essere schematizzata, *a priori*, cioè prima di fare qualsiasi misura, come una variabile casuale con una certa distribuzione. *A posteriori* (cioè dopo la prima misura) invece ha sempre lo stesso valore, quindi, ripetendo la misura e facendo la media non migliora l’errore sistematico.

- **errore casuale**, dovuto a molteplici cause, è presente soprattutto quando facciamo misure di elevata sensibilità. Questo può essere visto come un valore aggiuntivo alla misura, positivo o negativo, spesso distribuito in modo normale. Spesso esprimiamo questo errore con la deviazione standard della distribuzione. Esso cambia di valore ogni volta che facciamo la misura, in genere in modo indipendente. Questo fatto ci permette di ridurlo, prendendo la media di n misure, di un fattore $\sqrt{n}$.

La presenza degli errori di misura limita la qualità della misura, quindi accanto al valore più “ragionevole” o “probabile” della misura diamo l’**incertezza**.

L’incertezza può essere espressa in vari modi, dipendentemente dal tipo di errore e dall’uso che ne vogliamo fare. Molto spesso viene espressa tramite la deviazione standard della distribuzione degli errori (e quindi può conglobare anche la parte di errore sistematico non noto). Alternativamente, un modo di esprimere l’incertezza è facendo riferimento ad un

livello di fiducia collegato ad un **intervallo di fiducia**: scelto il livello di fiducia **p** (per esempio 0.99), possiamo dare come incertezza (in questo caso viene chiamata "incertezza estesa") la semi-larghezza dell'intervallo con centro il valore più probabile e tale che abbiamo una probabilità **p** che il valore vero sia nell'intervallo.

Nel caso delle misure indirette, basate su altre misure di base, l'incertezza si propaga col meccanismo della somma quadratica. Bisogna però fare attenzione a che le misure di base non siano correlate, altrimenti bisogna utilizzare la formula più complessa sviluppata nel capitolo 14.

Esiste un interessante documento del 1994, "Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results", (http://physics.nist.gov/Document/tn1297.pdf), prodotto dal NIST, l'istituto americano per gli standard, basato su un documento dell'ISO (International Organization for Standardization), che indica le linee guida per l'espressione dell'incertezza di misura.

18 - Esercitazioni pratiche

- Misure di densità
- Il pallinometro
- Il contatore
- La molla
- Il volano

Misure di densità

Sono disponibili due cilindri e due parallelepipedi dello stesso materiale. Occorre misurare il volume e la massa di ciascun oggetto e calcolare la densità (assoluta) del materiale di cui sono composti, determinando anche l'incertezza delle varie misure.
La misura del volume va eseguita come misura indiretta utilizzando le misure delle dimensioni degli oggetti e, come misura diretta, misurando l'innalzamento del livello dell'acqua di un "protettone", dopo che è stata immerso in essa l'oggetto in esame.

Strumenti disponibili:

- Calibro a cursore con nonio (sensibilità 0.05 mm)
- Calibro Palmer (sensibilità 0.01 mm)
- Bilancia sensibilità 0.5 g
- Bilancia sensibilità 0.01 g
- Provettone graduato

Alla fine della relazione aggiungere il seguente prospetto riassuntivo:

Note (in forma di domande tipiche a.k.a. FAQ):

- Tra le misure effettuate con i vari strumenti di diversa sensibilità, quale bisogna considerare ? (per esempio tra le misure con le diverse bilance, quale prendere per calcolare la densità ?

  Va presa la misura con più bassa incertezza. In linea di principio, se ci sono misure con incertezze non tanto differenti, si può farne la media pesata (vedi capitolo 15).
  È importante invece fare il confronto tra le misure con i vari strumenti, per vedere se sono coerenti, se cioè gli intervalli di misura hanno punti in comune.

- Cosa si deve fare se due misure fatte con differenti strumenti non sono coerenti ?

  Quasi sicuramente ci sono errori (lo strumento è starato o sono state compiute operazioni errate). Ripetere le misure con più cura ed eventualmente sostituire gli strumenti.

- Come si calcolano le incertezze sui volumi e sulla densità ?

  Si vedano le formule riportate nel capitolo 7. Nel caso del volume del cilindro, essendo B l'area di base ed h l'altezza, abbiamo

(18.1) $$V = B \cdot h$$

(18.2) $$\Delta V = \sqrt{\left|\frac{\partial V}{\partial B}\Delta B\right|^2 + \left|\frac{\partial V}{\partial h}\Delta h\right|^2} = \sqrt{\left(h \cdot \Delta B\right)^2 + \left(B \cdot \Delta h\right)^2}$$

- Come mettere insieme incertezze dovute ad errori casuali ed incertezze dovute ad errori di lettura ?

  Il problema è che l'errore di lettura è distribuito uniformemente (e in genere se ne dà la semi-ampiezza dell'intervallo di misura), mentre l'errore casuale è gaussiano (e se ne dà spesso la deviazione standard). In genere, quando si hanno misure con incertezze dei due tipi da combinare insieme, si riportano entrambe a deviazioni standard, che significa dividere l'incertezza di lettura per $\sqrt{3}$ (vedi capitolo sulla distribuzione uniforme e capitolo 17).

- Quante volte devo ripetere una misura ?

  A parte casi banali, almeno 3 volte: se il risultato è sempre lo stesso, mi fermo; se è diverso, posso continuare per avere una decina di valori (o più)[5] o, se mi interessa un valore grossolano dell'incertezza, mi fermo a 3 e prendo come incertezza il massimo meno il minimo valore, diviso 2.

- Quali sono le incertezze delle bilance in uso ?

  Per le bilance digitali si considera metà del minimo "digit" (cifra). Per quella analogica, 0.5 g.

- Come si scrivono le misure ?

  Si veda al capitolo 4.

- Come si fa a fare una stima grossolana dell'incertezza di misura (per controllare che quello che viene fuori dai calcoli non sia chiaramente errato) ?

[5] In tal caso poi, facendo la media, miglioro la mia incertezza della radice quadrata del numero delle misure.

Se la formula è abbastanza semplice (per esempio un prodotto di potenze, eventualmente negative, come nella 7.19, allora l'incertezza relativa sarà dell'ordine della massima incertezza relativa presente (si noti che le altre, se sono molto più basse, a causa della somma quadratica, non contano nulla).
Si noti che basse incertezze assolute possono "causare", in taluni casi, alte incertezze relative. Per esempio, nel calcolo dell'area A di un rettangolo di lati a e b, l'incertezza relativa è data da

(18.3) $$\frac{\Delta A}{A} = \sqrt{\left(\frac{b \cdot \Delta a}{A}\right)^2 + \left(\frac{a \cdot \Delta b}{A}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$$

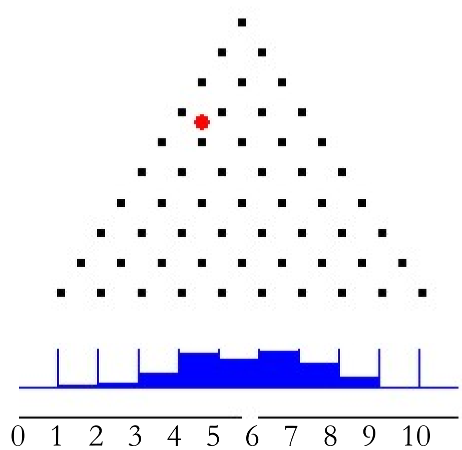
e, anche se $\Delta a << \Delta b$, se $a << b$, può risultare che il termine relativo ad a sia più grande di quello relativo a b.

Ulteriori analisi

Ricavare quindi la migliore stima della densità dai vari valori ottenuti (con il metodo della media pesata).

Il Pallinometro

"Pallinometro" è il nomignolo dato dagli studenti al quinconce di Galton (da Francis Galton (1822-1911), scienziato britannico), uno semplice strumento che evidenzia un comportamento casuale. Esso è costituito da una tavola verticale su cui sono disposti dei chiodini "a quinconce" (vedi figura), su N file orizzontali. Se si lasciano cadere dall'alto delle palline di diametro inferiore alla distanza tra i chiodini e superiore alla sua metà (o poco meno), queste cadranno incontrando i chiodi e, quindi, a seconda di come avviene l'urto, andranno a destra o a sinistra.



Sotto sono disposti dei "bidoncini" ("bin") che raccolgono le palline. Dopo averne lanciate un certo numero, si "forma" nei bidoncini un "istogramma".

Analizziamo il dispositivo. Ad ogni fila di chiodi che incontra la pallina, avviene una scelta tra il deviare a destra (D) e a sinistra (S). Possiamo quindi descrivere il percorso della pallina come una successione del tipo SSDSDDDSSDS… di N successivi valori. Il bidoncino dove cade la pallina non dipende dalla successione degli S e D, ma solo dal numero totale degli s o dei D e dal numero N delle file di chiodi.

È chiara l'analogia con le prove alla Bernoulli. Se per esempio chiamiamo "successo" la scelta D, i bidoncini possono essere numerati da sinistra a destra con i numeri da 0 a N e la pallina cade nel bidoncino **k** se sono k le volte che ha "scelto" di andare a destra.

k quindi è una variabile casuale discreta con distribuzione

(18.4) $$P(k;N) = \binom{N}{k} \frac{1}{2^N}$$

che è la binomiale con $p = q = \frac{1}{2}$.

Se lanciamo M palline, l numero aspettato di palline in ciascun bin è dato da

(18.5) $$t_k = M \cdot P(k;N) = M \cdot \binom{N}{k} \frac{1}{2^N}$$

I t_k sono i valori "teorici" o "aspettati" del numero di palline nei bin; non sono, se non in casi molto rari, interi (per esempio se $M = 2^N$).

Scegliendo N (il numero delle file di chiodi) almeno pari a 20, eseguire alcune serie di "lanci" con M = 30, 100, 300, 1000, 3000, 10000, riportando sul quaderno i risultati "sperimentali" s_k e gli istogrammi, divisi in due figure, una con M = 20, 100, 300 e una con M = 1000, 3000, 10000. Per almeno una serie, riportare sulla figura dell'istogramma anche i valori aspettati t_k. Graficare tutti gli istogrammi in una sola figura su un foglio di carta semilog, insieme anche all'andamento teorico (in un foglio semilog l'andamento teorico ha sempre la stessa forma, a parte uno scorrimento in alto o in basso). Calcolare per qualche serie la media di k.

Perché 30, 100, 300, 1000, 3000 e 10000 ? Vedi al capitolo 20 "La scala logaritmica".

Ulteriori riflessioni

Ripetiamo **L** volte un numero **M** di lanci. Consideriamo il bin **k**, caratterizzato da un valore aspettato t_k; per ognuna delle L serie, segniamo il valore sperimentale s_k: come sono distribuiti gli s_k ? È facile rendersi conto che si tratta di una distribuzione binomiale in cui M sono le prove ripetute e $p = t_k$; gli s_k potranno prendere i valori **m** con $0 \le m \le M$, ciascuno con probabilità

(18.6) $$\text{Prob}(m;t_k,M) = \binom{M}{m} t_k^m (1-t_k)^{M-m}$$

Poiché $\mathbf{t_k}$ è in genere piccolo e M grande, spesso si approssima questa alla distribuzione di Poisson

(18.7) $$\text{Prob}(\text{m;t}_\text{k}) = \frac{e^{-t_k} t_k^m}{m!}$$

Ricordiamo ora che la distribuzione di Poisson ha una deviazione standard $\sigma = \sqrt{\mu}$, quindi la dispersione relativa è $\frac{\sigma}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{t_k}}$ e, se $\mathbf{s_k}$ è abbastanza grande, la dispersione relativa è circa $\frac{1}{s_k}$. Infatti vediamo che, tanto più grande è il numero di palline che vanno in un bin, tanto più piccolo è l'errore percentuale tra $\mathbf{s_k}$ e $\mathbf{t_k}$.

Ulteriori analisi

- Eseguire il test del χ^2 per almeno una serie tra s_k e t_k (prendere il livello di fiducia pari a 0.95).
- Supponendo che non sia $p = \frac{1}{2}$ la probabilità per la pallina di andare a destra, stimarla dai valori sperimentali di una serie.

Il contatore

È a disposizione per questa esperienza un contatore di raggi cosmici, basato su un fotomoltiplicatore e un materiale scintillatore. Il dispositivo può essere regolato in modo tale da dare il numero di raggi cosmici rivelati in un dato intervallo di tempo (per esempio 10 secondi) selezionabile. Fare circa N = 50 misure con $\Delta t = 5\,s$ e altrettante con $\Delta t = 10\,s$ e con $\Delta t = 20\,s$ o $\Delta t = 2.5\,s$, dipendentemente dal valore medio del numero di conteggi al secondo (se è maggiore di circa 1, scegliere l'intervallo più piccolo).

Istogrammare i dati, calcolare la media $\overline{k}$ e riportare sui grafici gli andamenti teorici

(18.8)
$$t_k = N \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}$$

avendo posto $\mu = \overline{k}$. Controllare che $\overline{k}_{20s} \approx 2 \cdot \overline{k}_{10s} \approx 4 \cdot \overline{k}_{5s}$.

La molla

Lo scopo di questa esperienza è la misura della costante elastica di una molla e dell'accelerazione di gravità.

È disponibile un supporto a cui è agganciata verticalmente una molla e 10 dischi di piombo che possono agganciarsi all'estremo inferiore libero della molla.

Possono eseguirsi misure di massa (dei dischetti) con bilance (vedi esperienza della densità), misure di tempo (il periodo di oscillazione del sistema molla-dischetti) con un cronometro, e di lunghezza (l'allungamento della molla) con un traguardo di carta millimetrata e una squadra.

L'allungamento Δl di una molla a cui è applicata una forza è governato dalla legge di Hooke

(18.9) $$F = -k \cdot \Delta l$$

dove k, positiva, è la "costante elastica della molla", a noi incognita. La forza applicata è la forza-peso dei dischetti di piombo agganciati, di massa totale M,

(18.10) $$F = M \cdot g$$

ovvero, prendendo le grandezze in modulo,

(18.11) $$M \cdot g = k \cdot \Delta l$$

dove g è l'accelerazione di gravità, che è una delle cose che vogliamo misurare.
Si dimostra che il periodo di oscillazione del sistema molla-massa (dei dischetti) è dato da

(18.12) $$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}$$

Possiamo utilizzare questa relazione per ricavare **k** :

(18.13) $$k = 4\pi^2 \frac{M}{T^2}$$

(**Attenzione !** in pratica in **M** è compresa anche la massa "parassita" della molla e del perno, che danno luogo ad una massa "efficace" aggiuntiva).

Dalle precedenti equazioni, sostituendo il valore noto di **k**, si ricava **g** come

(18.14) $$g = \frac{k \cdot \Delta l}{\Delta M}$$

dove ΔM è la variazione di massa che produce l'allungamento Δl .

In pratica, per ridurre l'errore e per calcolare la massa parassita efficace, stimeremo k e g da due grafici lineari.

La procedura consigliata, arricchita di elementi didattici non finalizzati al calcolo di k e g, è la seguente:

- identificare e pesare singolarmente i dischetti di piombo. Calcolarne la media con la relativa incertezza.

- pesarli tutti e 10 contemporaneamente. Fare la "media fisica", dividendo il valore per 10 e valutare l’incertezza dall’errore di sensibilità della bilancia. Confrontare le due medie ottenute.
- agganciare successivamente i vari dischetti al perno. Per ciascun dischetto aggiunto:
    - misurare l’allungamento della molla (osservando la posizione del perno), aumentando via via il numero di dischetti; si noti che la molla si "libera" dopo l'applicazione di almeno 3 dischetti, quindi l’allungamento Δl va calcolato rispetto alla posizione di equilibrio con 3 dischetti.
    - misurare il periodo di oscillazione del sistema molla-dischetti. Per ridurre gli errori di misura, misurare il tempo impiegato ad eseguire N oscillazioni (almeno 20) e dividerlo per N: anche l'errore di misura (dato per lo più dall'errore dell'operatore umano a far partire e a fermare il cronometro al tempo esatto, dell'ordine in genere di 0.2 s) si ridurrà dello stesso valore N.
    - ripetere le misure più volte, eliminando casi molto diversi dagli altri simili; farne quindi la media e valutare l'errore su questa media.
- fare un grafico di $\mathbf{T^2}$ in funzione di **M** (per M dato da 3,4,…,10 dischetti). Notare che l'andamento dovrebbe essere rettilineo (ma una retta **y = p x + q** che non passa per l'origine, perché c'è anche la massa "parassita" della molla). Ricavare:

    - la pendenza della retta (il coefficiente angolare **p**) e da questa il **k** come

(18.15)
$$k = \frac{4\pi^2}{p}$$

    - la massa parassita, pari a $-\frac{q}{p}$.

- fare un grafico di Δl in funzione di ΔM (e **non** di M !). Anche in questo caso l'andamento è rettilineo, ma la retta **y = a x** passa per l'origine. Dal valore **a** del coefficiente angolare ricaviamo l'accelerazione di gravità **g**

(18.16)
$$g = a \cdot k$$

- fare un grafico su carta doppio-logaritmica dei periodi T in funzione delle masse M applicate alla molla, corrette con l’aggiunta della massa parassita. I punti graficati dovrebbero trovarsi su una retta di pendenza $\frac{1}{2}$.

- riempire il seguente resume, da mettere alla fine della relazione:

Misura di g

Gruppo ……………

Misura pesetti	M	incert
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
Media "matematica"		
Peso totale		
Media "fisica"		

N pesetti	Mtot	T	dT		DM	DL	dDL
3					####	####	####
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

	Misura	Incertezza
pendenza M-T2		
massa efficace molla		
k		
pendenza DM-DL		
g		

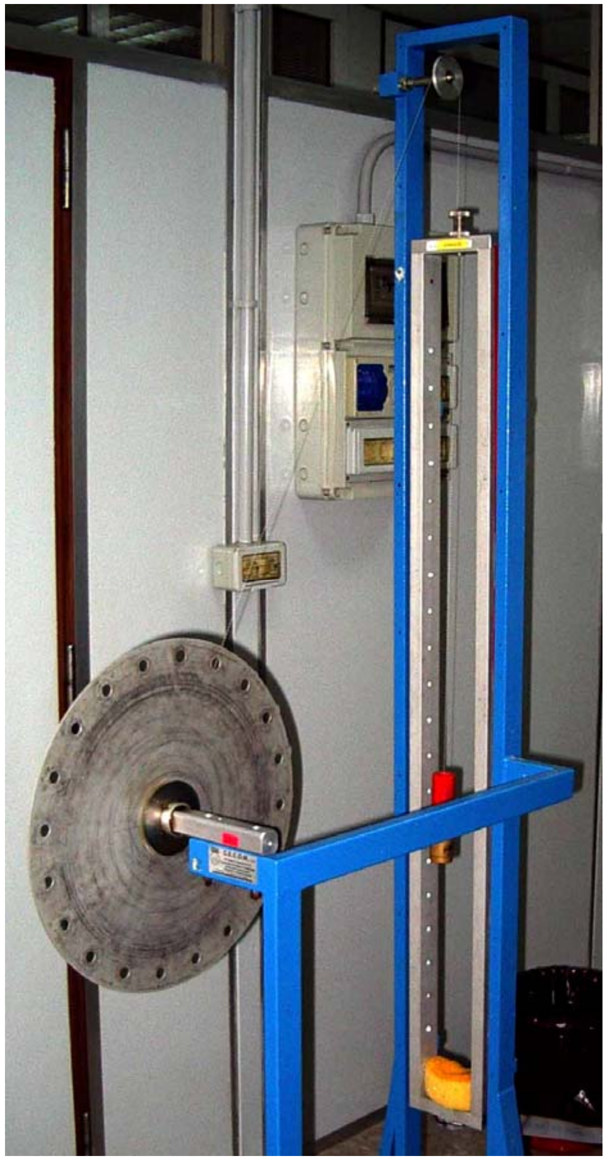
Il volano

Lo scopo di questa esperienza è l'acquisizione di dati sperimentali tramite un calcolatore con apposita interfaccia e loro elaborazione con un foglio di calcolo.

È disponibile un disco (il "volano") ruotante intorno ad un perno orizzontale intorno a cui si avvolge un filo sottile e resistente. Il filo passa intorno ad una carrucola posta in alto ed è collegato, all'altro estremo, ad un peso di ottone e plastica (vedi figura). Il peso può cadere lungo una traiettoria verticale ai cui lati sono posti dei led (ligth-emitting diodes, diodi che emettono luce, in pratica lampadinette) con di fronte delle fotocellule.
Il disco può essere "appesantito" con coppie simmetriche di bulloni avvitati in appositi fori che sono sul suo bordo, oppure si possono montare su di esso coppie di pale che ne aumentano fortemente la resistenza dell'aria.

Operazione: Una volta montati i bulloni o le pale volute, si avvolge il filo intorno al perno (ruotando il disco) finché il peso non raggiunge la posizione più alta; si lascia quindi cadere il peso. Quando questo, nella sua caduta, passa tra un led e la relativa fotocellula, viene “acquisito” su un file del calcolatore il tempo del passaggio. Alla fine della caduta ci sono nel file una serie di dati, cioè una successione di tempi di passaggio. Si possono registrare più serie di dati sullo stesso file.

Si possono quindi copiare i dati in un foglio Excel (con il "taglia e incolla" o con l'importazione del file) e quindi elaborare i dati.



Lo scopo di questa esperienza non è studiare approfonditamente la fisica di questo sistema, cioè, per esempio, il momento di inerzia del volano, lo studio degli attriti, eccetera, ma il trattamento dei dati tramite un foglio di calcolo (o "spreadsheet").
Per semplicità quindi studieremo il moto verticale del peso di ottone, registrando i tempi di passaggio $\mathbf{t_i}$ alle altezze delle fotocellule $\mathbf{h_i}$. .
Possiamo verificare che, con buona approssimazione, siamo in presenza di un moto ad accelerazione costante, del tipo

(18.17) $$h_i = \frac{1}{2} a \cdot t_i^2 + v_0 \cdot t_i + h_0$$

dove i parametri v_0 e h_0 sono la velocità e la posizione iniziale, mentre a è l'accelerazione.

Faremo questa prova con varie condizioni sperimentali (senza bulloni o con diverse coppie di bulloni). Ripeteremo le misure più volte.

Una volta portati i dati di tempo e altezza nel foglio Excel (in genere è più comodo per colonne), possono realizzarsi varie analisi. Ne suggeriamo qualcuna:

- graficare h vs t, quindi
  - fare il fit lineare, ricavando i valori dei parametri della retta
  - calcolare i residui del fit e graficarli: come sono ? Un buon fit deve avere residui (cioè errori) piccoli e casuali.
  - fare il fit quadratico, ricavando i parametri della parabola
  - calcolare i residui del nuovo fit e graficarli: ora come sono ?

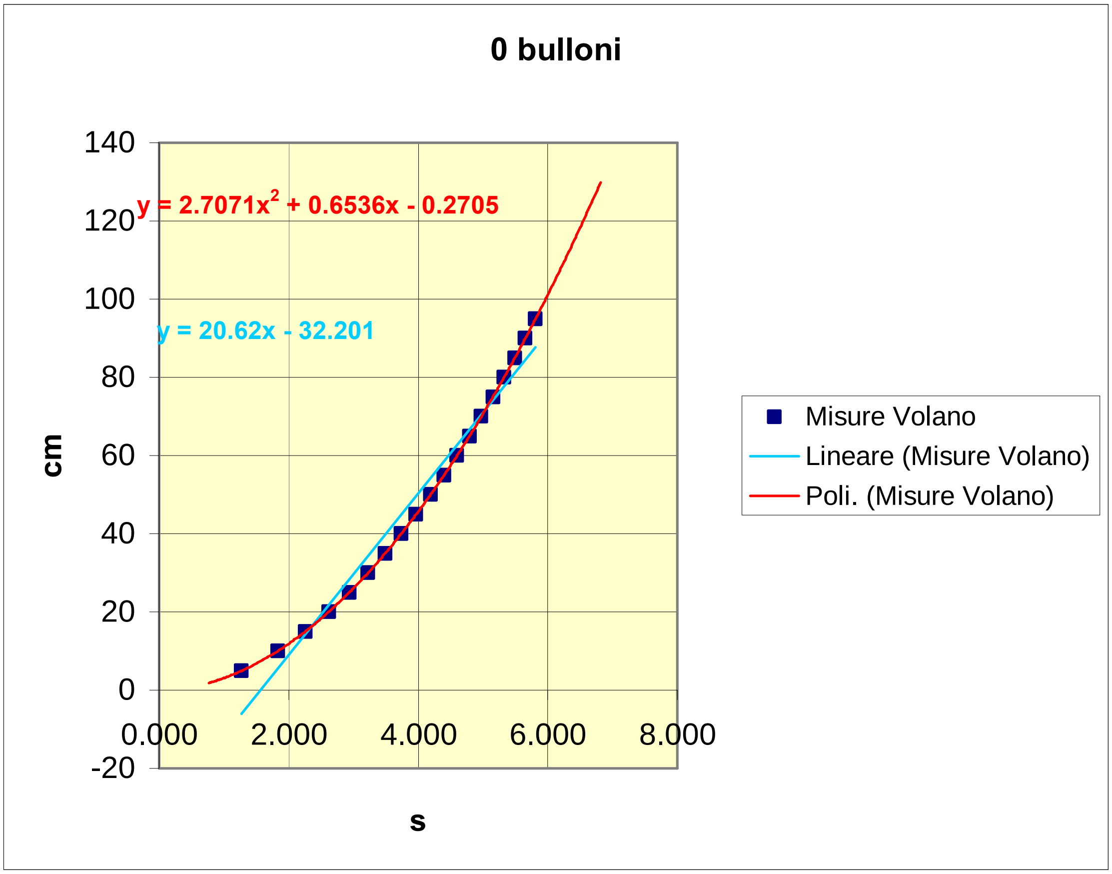
- calcolare una colonna con $\sqrt{h}$ e graficare $\sqrt{h}$ vs t:
  - fare il fit lineare, ricavando i valori dei parametri della retta
  - calcolare i residui del fit e graficarli: come sono ?

- calcolare una colonna con t^2 e graficare h vs t^2
  - fare il fit lineare, ricavando i valori dei parametri della retta
  - calcolare i residui del fit e graficarli: come sono ?

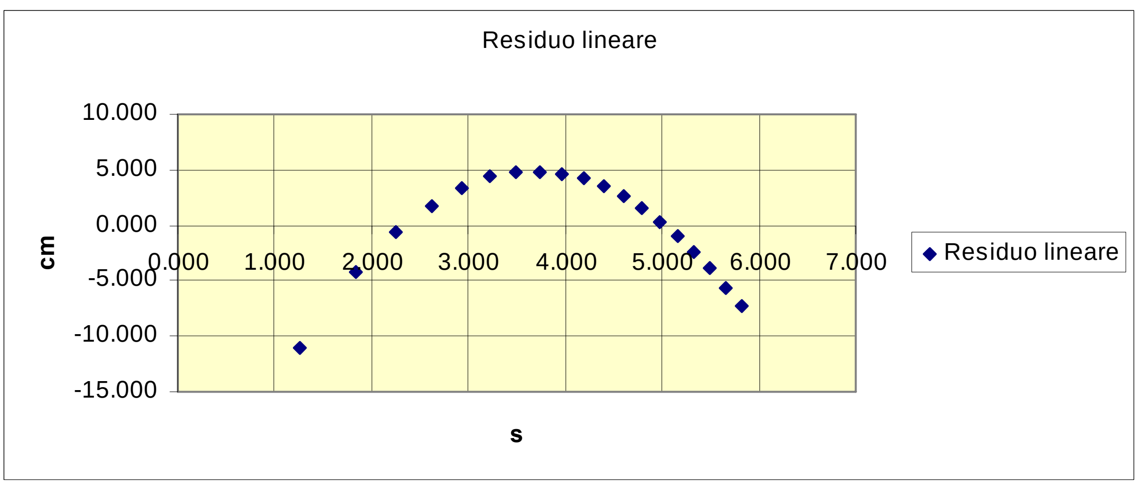
- calcolare per ogni coppia successiva di fotocellule la velocità media per i vari segmenti e associare la velocità media al tempo medio per il segmento
  - fare il fit lineare, ricavando i valori dei parametri della retta
  - calcolare i residui del fit e graficarli: come sono ?
  - l'accelerazione ottenuta (pendenza della retta) è consistente con l'accelerazione trovata con il fit quadratico ?

			Gruppo 1													
			0 bulloni													
x (s)	y (cm)		linear fit	residuo		sqr(y)	residuo		x^2	residuo		dy/dx	residuo		quad fit	residuo
1.268	5		-6.061	-11.061		2.236	-0.0015		1.607	0.308759					4.909	-0.0914
1.839	10		5.717	-4.283		3.162	0.016976		3.382	0.264996		8.754	0.671076467		10.086	0.0856
2.260	15		14.399	-0.601		3.873	0.00262		5.107	0.085192		11.875	-0.084139887		15.033	0.0326
2.620	20		21.816	1.816		4.472	-0.0016		6.863	-0.0122		13.900	-0.086613528		20.019	0.0193
2.937	25		28.353	3.353		5.000	-0.00515		8.624	-0.09232		15.772	-0.176879918		24.995	-0.0051
3.227	30		34.344	4.344		5.477	-0.00184		10.415	-0.09015		17.209	0.019475433		30.033	0.0330
3.491	35		39.776	4.776		5.916	-0.00498		12.185	-0.14697		18.979	-0.270237323		34.996	-0.0039
3.737	40		44.865	4.865		6.325	-0.00533		13.968	-0.16499		20.262	-0.165584423		39.986	-0.0140
3.970	45		49.664	4.664		6.708	-0.00403		15.762	-0.1543		21.482	-0.077716925		44.995	-0.0055
4.189	50		54.183	4.183		7.071	-0.00445		17.550	-0.1599		22.816	-0.179574018		49.978	-0.0216
4.399	55		58.507	3.507		7.416	-0.0027		19.352	-0.12883		23.840	-0.024919165		54.992	-0.0084
4.599	60		62.634	2.634		7.746	-0.00147		21.153	-0.09894		24.984	-0.043576752		59.997	-0.0025
4.791	65		66.583	1.583		8.062	-0.00102		22.951	-0.07613		26.108	-0.091211905		64.991	-0.0092
4.975	70		70.376	0.376		8.367	-0.00117		24.747	-0.05942		27.185	-0.134322994		69.973	-0.0267
5.154	75		74.078	-0.922		8.660	0.002166		26.566	0.020672		27.845	0.214943539		75.014	0.0143
5.323	80		77.556	-2.444		8.944	-0.00291		28.333	-0.04376		29.645	-0.637716104		79.908	-0.0919
5.493	85		81.068	-3.932		9.220	0.003528		30.175	0.101897		29.355	0.609994504		85.007	0.0067
5.656	90		84.435	-5.565		9.487	0.006237		31.995	0.185794		30.628	0.25466841		90.041	0.0407
5.815	95		87.700	-7.300		9.747	0.00819		33.812	0.259755		31.573	0.199633401		95.062	0.0620
Scarto quadr. medio				4.646498			0.005589			0.156035			0.306199773			0.043451
Incertezza su y (cm)			0.05													
Media x		3.98646								Media x su 18		4.137497				
Media x^2		17.6077								Media x^2 su 18		18.49658				
Braccio^2		1.71583								Braccio^2 su 18		1.377697				
M y	50.000			M y		6.731			17.608			22.345				
M y^2	3250			M y^2		50			406.1631			514.346				
M xy	234.703			M xy		29.67069						100.1968				
m	1.29191			m		1.653887						5.620944				
dm				dm		0.008757						0.010041				
q				q		0.137868						-0.91153				
dq				dq		0.036746						0.043182				

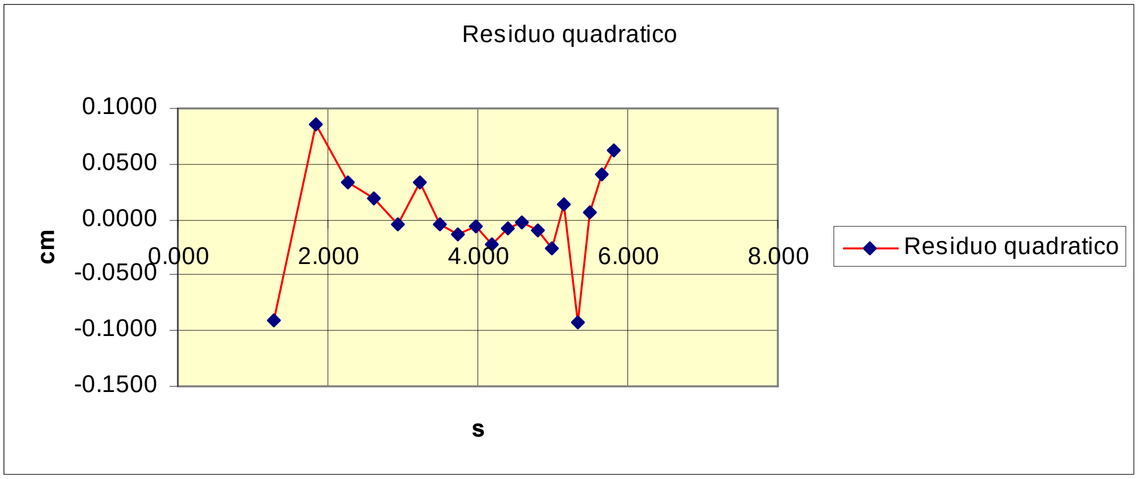
Fit lineare e quadratico



Residui che indicano cattivo fit



Residui di un fit migliore (una fotocellula non è correttamente montata)



Ulteriori analisi

Si misurino le accelerazioni con vari numeri N di coppie di bulloni (per esempio 0, 2, 4, 6,…) e si grafichino questi valori in funzione di N: cosa si trova ? Possiamo trovare una legge "empirica" che descrive questi dati ?

19 - Test ed esercizi

Test su dimensioni e istogrammi

1. Quali sono le dimensioni di una forza ? (Ricordare la seconda legge di Newton F=ma)

   ....

2. Nella legge di gravitazione (in forma scalare)

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

   quali sono le dimensioni della costante G ?

   ....

3. Istogrammare separatamente le due serie di dati e calcolare la media e la deviazione standard da due sottoinsiemi di ciascuna serie:

88.810	95.551	92.669	95.915	95.639	94.271	97.081	95.201	95.501	90.672
87.918	97.852	94.148	90.122	94.449	93.381	91.282	96.506	96.445	93.385
83.838	91.391	94.811	90.874	93.233	97.506	89.214	91.677	91.737	88.698
93.936	88.159	98.476	96.239	87.743	89.803	94.733	92.161	93.221	89.443
92.396	93.316	96.757	95.212	93.632	93.870	90.925	91.118	94.827	92.836

6.069	6.020	5.908	6.035	6.248	6.924	6.656	6.047	5.506	5.766
6.083	6.417	6.818	5.724	5.736	6.342	6.084	6.731	6.526	5.879
5.761	6.823	6.907	5.656	6.985	5.539	6.552	6.401	6.234	5.553
6.385	6.594	5.619	6.580	5.630	5.566	6.839	5.744	5.943	6.350
5.882	6.739	5.695	5.596	6.517	6.079	6.851	5.870	6.662	6.168

Altri esercizi

1. Calcolare media e deviazione standard direttamente dagli istogrammi dell'esercizio precedente.

2. Direttamente dagli istogrammi precedenti, ricavare gli istogrammi con un bin 4 volte più grande.

3. Provare ad istogrammare le misure precedenti con un bin 4 volte più piccolo.

4. Verificare che la formula

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

dove s e s_0 sono lunghezze, v_0 è una velocità, a un'accelerazione e t il tempo, è dimensionalmente corretta.

5. Identificare gli eventuali errori dimensionali in

$$s = s_0^2 + v_0 \cdot \cos(s_0 \cdot t)$$

dove s e s_0 sono lunghezze, v_0 è una velocità e t il tempo.

6. Nella legge della forza elastica

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{l}$$

indicare le dimensioni della costante elastica k.

Test su incertezze e cifre significative

1. Scrivere in forma corretta i risultati delle seguenti misure:

    a. 7.34067 ± 0.0932 m^2 ....

    b. 32.123 ± 1.2 m/s ....

    c. $0.00003540 \pm 0.00000275$ s ....

    d. $7.34 \cdot 10^{22} \pm 6.56 \cdot 10^{21}$ kg ....

2. Il diametro di un cilindro di rame è 63.2 ± 2.3 cm. Quale è la misura della circonferenza ?

    ....

3. Calcolare le incertezze relative (percentuali) del diametro e della circonferenza del precedente esercizio.

    diametro ....

    circonferenza ....

4. Due segmenti misurano rispettivamente 23.000345 ± 0.000005 cm e 7.2 ± 0.4 cm.
    Qual è la loro somma ?

    ....

Altri esercizi

1. Abbiamo valutato il diametro di un cilindro con un'incertezza relativa di 0.00034. Abbiamo quindi moltiplicato questo valore per π, ottenendo dalla calcolatrice 384.7835193 cm. Esprimere la misura con la corretta espressione dell'incertezza.

Test sulla propagazione delle incertezze

(indicare sinteticamente i calcoli e dare il risultato finale)

1. Le misure dei lati di un parallelepipedo sono 4.3 ± 0.3 cm, 7.8 ± 0.4 cm e 5.7 ± 0.3 cm. Quale è la misura (con la relativa incertezza) del volume del parallelepipedo ?

   ....

   ....

   ....

2. Calcolare la somma dei tre lati del parallelepipedo dell'esercizio precedente (con la relativa incertezza).

   ....

   ....

   ....

3. Il diametro di un cilindro di rame è 63.2 ± 2.3 cm. Quale è la misura (con la relativa incertezza) dell'area di base ?

   ....

   ....

   ....

Altri esercizi

1. Un quadrato ha un lato di 3.27 ± 0.12 m. Quale ne è l'area ?

2. Un rettangolo ha un lato di 3.27 ± 0.12 m e l'altro di 4.123 ± 0.023 m . Quale ne è l'area ? e il perimetro ?

3. Un cilindro ha il diametro di 2.543 ± 0.006 cm e l'altezza di 7.34 ± 0.05 cm . Quale è il volume e la superficie laterale ? Quale è l'incertezza relativa su queste due misure ?

4. Un'auto percorre 100.15 ± 0.21 m in 7.030 ± 0.010 s. Quale è la velocità ? Valutarne anche l'incertezza relativa.

Test elementare sulle probabilità

1. Supponiamo di avere un mazzo di 52 carte da poker ben mescolato. Calcolare la probabilità di avere, in una singola estrazione :

    a. una figura (J, Q o K) ....

    b. un 3 di qualsiasi colore o un 5 di cuori ....

    c. una carta di quadri o di picche ....

    d. una carta di denari ....

2. Supponiamo di avere un mazzo di 52 carte da poker ben mescolato.

    Calcolare la probabilità di avere, in due successive estrazioni (senza reinserimento) :

    a. almeno una figura (J, Q o K) ....

    b. una ed una sola figura ....

    c. due figure ....

    d. un tre e una figura ....

    e. prima un 3 e poi una figura ....

3. Supponiamo che la probabilità di nascere in uno qualsiasi dei giorni dell'anno sia 1/365. In una classe di 30 studenti, quale è la probabilità

    a. che almeno 2 studenti abbiano lo stesso compleanno ?

        ....

    b. che almeno uno studente abbia il mio stesso compleanno ? (io non appartengo alla classe) ....

Altri esercizi

1. Supponiamo di giocare a poker[6] con un mazzo intero di 52 carte. Quale è la probabilità di avere "servito" (cioè con le cinque carte distribuite all'inizio)
    a. una coppia "vestita" (cioè 2 J, Q, K o assi)
    b. un full (cioè un tris e una coppia)
    c. un poker (cioè 4 carte dello stesso valore, per es. 4 "Q" o 4 "5")
    d. "colore" (cioè tutte le 5 carte dello stesso seme)

2. Valutare le probabilità precedenti nel caso si giochi con 5 dadi da poker (dadi sulle cui facce ci sono 9, 10, J, Q, K e A).

3. Lanciando 2 dadi, quale è la probabilità che la somma dei due numeri usciti superi 9 ?

4. Quale è la probabilità che lanciando 6 volte un dado non esca mai il 6 ?

[6] Per una descrizione delle regole del poker, vedi per esempio http://it.wikipedia.org/wiki/Poker

Esercizi sulle variabili casuali discrete

1. Un venditore di pomodori suddivide il suo prodotto in tre categorie: A di prima scelta, B di seconda scelta, C di scarto (per usi non commestibili). In una annata produce 500 tonnellate di pomodori. Se, in genere, la probabilità che un pomodoro sia di categoria A è 0.2, che sia di categoria B è 0.7 e che sia di categoria C è 0.1, e se vende quelli di categoria A a 2 €, i B a 1 € e i C a 10 centesimi, quale è il valore aspettato del ricavo del produttore ?

2. Se un anno un parassita attacca le coltivazioni, colpendo ciascun frutto con probabilità 0.2 e "riducendolo" a categoria C, quale è il ricavo del produttore ?

3. Un dado "disonesto" ha probabilità delle varie facce pari a :

   1 → 0.10
   2 → 0.15
   3 → 0.15
   4 → 0.15
   5 → 0.15
   6 → 0.30

   Quale è il valor medio e la deviazione standard ?

Test sulla binomiale

1. Quale è la probabilità che lanciando 10 volte un dado
    a. si abbia 4 volte il 6 ?
    b. si abbia 8 volte un numero dispari ?

2. Si lanci 100 volte un dado.
    a. Si consideri la distribuzione del numero di volte che esce il 6: quale è il valor medio e la deviazione standard di questa distribuzione ?
    b. Si consideri la distribuzione del numero di volte che esce un numero dispari: quale è il valor medio e la deviazione standard di questa distribuzione ?

Altri esercizi

1. Quale è la probabilità che lanciando 6 volte un dado esca 2 volte il 6 ?

2. Lanciando 5 dadi da poker, quale è la probabilità di fare "poker" (4 valori uguali su 5) ?

3. Ogni giorno Pierino va al bar di un amico e compra un cioccolatino il cui acquisto è abbinato a una lotteria: se si vince, si ha un altro cioccolatino. La probabilità di vincere è 0.01 . In una settimana Pierino vince 3 volte. Qual è la probabilità di un tale evento ? Si può pensare che il suo amico barista "bari" ?

4. Anna percorre la strada da casa all'università (10 km) ad una velocità media di 30 km/ora più il tempo perso per i semafori (per ogni semaforo rosso perde un minuto e sul percorso ci sono 10 semafori che sono "rossi" ciascuno con probabilità 0.5). Quale è la probabilità che Anna ci impieghi al più 23 minuti ? e che ci impieghi meno di mezz'ora ?

Test sulla Poissoniana

Eventi poissoniani

Un rivelatore di particelle rivela 193 eventi in 200 secondi. Sono riportati i tempi di rivelazione in secondi, dall'inizio dell'esperimento. Dividere l'intervallo in sottoperiodi di 5 secondi e verificare che il numero di eventi $\mathbf{k_i}$ in ciascun sottoperiodo è distribuito secondo Poisson, con $\mu = \frac{193}{200} \cdot 5 = 4.825$, riportando l'istogramma dei $\mathbf{k_i}$ con la distribuzione aspettata, normalizzata a 40.

0.1222965	40.32265	86.47062	131.6242	177.4732
0.3669938	43.22042	86.66746	131.7353	177.811
0.6309596	44.76171	89.97493	131.8687	178.976
0.6934335	44.85162	91.00443	132.1218	180.8931
0.7099024	46.55873	91.13055	133.9777	181.8684
1.043561	47.37276	91.94082	135.7047	185.0294
1.774322	49.42463	92.32994	137.1207	185.8767
2.157382	50.20158	92.65	137.7384	186.3757
6.191589	51.38106	93.0381	139.2383	187.8615
6.406148	51.5987	94.13755	140.5537	190.4416
8.519325	51.60309	95.7785	141.0963	190.9077
9.028439	51.78259	95.9754	141.0996	191.2192
10.92862	53.34565	96.42563	141.4931	191.2637
11.72015	54.27451	96.72414	145.0751	192.4775
11.95351	55.00815	97.35611	145.4846	192.8022
12.17121	55.03559	97.76374	146.3622	194.3186
12.63266	55.85402	98.77635	147.2498	196.1855
13.33597	56.50719	99.9992	148.2781	197.7562
13.71437	57.09561	100.0561	149.4957	198.2301
15.38591	57.98175	101.5039	152.1929	198.681
15.96279	58.44807	106.8299	152.8506	199.896
17.28769	65.0033	107.1806	153.0618	
17.98264	67.73297	107.5775	153.5758	
19.96184	67.87069	108.9048	154.4919	
20.85445	67.87149	110.504	155.4946	
22.62116	69.99692	110.8806	157.4799	
23.57228	72.00056	110.9425	157.8955	
24.46623	72.56319	110.9712	159.1051	
24.56964	72.81668	111.8014	160.1854	
24.90216	72.93658	111.9891	160.596	
26.82421	73.2037	112.3111	161.606	
29.45192	75.74654	112.8855	162.1757	
29.86012	75.84129	113.5297	162.2668	
32.21873	77.75893	113.9164	163.1754	
32.59529	78.37442	118.241	164.5291	
33.99259	79.41083	119.1172	164.9986	
34.7613	79.83187	119.6759	166.9052	
34.76142	80.01302	119.8972	168.3661	
35.41279	80.59615	120.3801	168.5007	
35.4625	82.58794	120.4968	170.1678	
36.21914	83.02778	124.1225	174.3638	
38.39381	83.42693	126.864	174.6659	
40.07841	85.06684	128.901	177.4181	

Altri esempi

1. Un contatore Geiger misura, in una certa situazione sperimentale, 4.8 particelle al secondo. In un'ora quanti "secondi" senza particelle ci aspettiamo ?

2. Quanti secondi con 8 particelle ci aspettiamo ?

3. Quale è il massimo numero di particelle che ci aspettiamo di osservare in un secondo, con probabilità almeno 0.5 ?

Test sulla distribuzione normale

1. Dalle seguenti 10 misure di una grandezza fisica **G** in unità non definite

-0.66	**2.12**	**0.79**	**2.94**	**1.52**	**0.54**	**1.38**	**2.68**	**2.57**	**1.74**

ricavare una stima di **G** con la relativa incertezza. Ponendo un livello di fiducia del 95 %, é tale misura consistente col valore teorico 2.70 ?

Stima di G con incertezza	
La teoria è verificata ?	

2. Lanciando una moneta "onesta", quale é la probabilità di avere almeno 60 volte testa su 100 lanci ?

Scarto	
Rapporto critico (CR)	
Probabilità	

3. Siano date le seguenti misure in metri di una lunghezza L, eseguite ripetutamente nelle stesse condizioni con uno strumento di grande accuratezza (assenza di errori sistematici) e con errori casuali abbastanza gaussiani:

17.03
15.92
18.16
19.29
15.86
17.65
17.56
18.41
13.55
16.81

a) Con che incertezza conosciamo L ? Scrivere la misura con l'incertezza in modo corretto.
b) La teoria ci dice che L dovrebbe valere 18.6 m. Ponendo un livello di fiducia del 95%, possiamo dire che la teoria è confermata ?

Altri esercizi

1. Si lanci 2000 volte una moneta "onesta". Quale è (in approssimazione) la probabilità di avere almeno 1050 volte testa ? E di averne almeno 950 ?

2. Si lanci 2000 volte una moneta "onesta". Quale è l'intervallo, simmetrico rispetto al valore al valor medio 1000, a cui è associata una probabilità il più vicino possibile a 0.5 ?

3. Si lancino 1000 volte una moneta e un dado. È più probabile che esca 200 volte il 6 o 550 volte testa ?

4. La misura della lunghezza di un tavolo ha un'incertezza, dovuta ad errori casuali, di 0.8 cm. Se ripetiamo la misura 100 volte e ne facciamo la media, quale è la larghezza dell'intervallo di misura relativo a un livello di fiducia di 0.9 ?

5. Osserviamo dei campioni estratti da una distribuzione gaussiana. Ne troviamo che una frazione pari a 0.1 (il 10 %) è inferiore a 4 e una frazione pari a 0.2 (il 20 %) è superiore a 5. Quale è la media e la deviazione standard ?

Esercizi sul coefficiente di correlazione e sulle variabili multiple

Esercizi sui test statistici

Esercizi vari

1. Graficare le seguenti misure su un foglio di carta millimetrata, stimare i parametri m e q della retta $y = m * x + q$, e valutarne l'incertezza, sia "a mano" che col fit.

x	y
3.0 ± 0.1	3.3 ± 0.3
5.0 ± 0.1	4.6 ± 0.3
7.5 ± 0.1	5.2 ± 0.3
10.0 ± 0.1	6.7 ± 0.3
14.5 ± 0.1	8.2 ± 0.3

2. Jacob e Johann, due onesti fratelli, giocano scommettendo sul lancio di una moneta: ad ogni lancio si giocano un euro. Quale è la probabilità che dopo 100 lanci Jacob abbia vinto almeno 10 euro ?

3. Calcolare il coefficiente di correlazione tra le seguenti due serie x_i e y_i .

   x_i :

   5.6 3.5 9.6 10.0 7.0 11.4 4.0 6.0 11.0 8.2

   y_i :

   7.2 7.0 6.1 4.8 5.5 4.7 7.8 6.3 5.6 5.8

   Cosa possiamo dire sulle due serie ?

4. Siano date le seguenti 4 misure sperimentali della grandezza **y**, per 4 diversi valori di **x**, con le relative incertezze **Δy**.

y	7.49	8.73	7.31	8.19
Δy	0.39	0.94	0.37	1.26
t	7.62	8.01	8.40	8.79

   Fare il test del χ^2 delle misure con i valori teorici **t**. Con un livello di fiducia del 95%, la teoria é accettata ?

5. Galileo Galilei vuole dimostrare che un grave lasciato cadere dalla Torre di Pisa si muove di moto accelerato uniforme, con accelerazione pari a 9.8 m/s^2. Per far ciò fa 7 misure, una per ciascun livello della Torre e quindi fa il χ^2 , pone un livello di fiducia del 95% e trova 10.

a) La sua teoria è confermata ?

b) Ripensandoci, scopre che ha sovrastimato le incertezze di misura di un fattore 2. Quale è il nuovo χ^2 ?

c) Cambia la sua opinione sulla teoria ?

6. Di una variabile gaussiana x ignoriamo il valore aspettato e la deviazione standard μ e σ; sappiamo tuttavia che:

   a. la probabilità di avere $x > 4$ è 0.8413

   b. la probabilità di avere $x > 10$ è 0.0228

   Trovare i valori di μ e σ.

Dati distribuiti secondo Cauchy

Provare a fare la media di 20, 50, 100, 200, 500 di questi numeri (comunque presi, eventualmente copiandoli in Excel con "taglia e incolla"). A cosa tende la media ?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	-21.74	0.83	0.35	12.82	-16.99	0.56	-2.30	2.72	1.40	-185.10
10	-8.71	-4.97	0.16	-0.69	2.58	-0.46	-2.63	13.39	-1.25	-0.66
20	-5.26	-2.34	4.26	0.52	-3.12	-1.14	-0.42	1.48	-2.21	0.65
30	-0.31	0.59	0.96	-3.53	2.20	0.59	0.29	-3.08	4.98	-1.04
40	-0.57	-2.33	0.62	0.32	-0.03	7.34	0.84	0.04	-0.04	-2.42
50	2.42	-1.02	1.89	-0.24	1.14	-0.53	13.27	0.06	-2.76	-0.51
60	-4.30	-10.32	6.45	0.19	0.58	3.33	-0.37	6.54	1.57	4.19
70	0.47	0.33	-0.04	-3.43	-0.19	1.50	-0.81	0.01	2.56	1.02
80	-0.98	2.03	0.73	1.25	0.37	-0.42	0.82	-1.52	-0.25	7.39
90	-0.81	0.47	-0.82	-27.93	0.34	0.89	0.48	0.28	-1.85	0.62
100	0.61	-1.20	0.44	0.91	2.35	-15.34	0.15	-5.31	1.49	-0.34
110	0.43	1.30	-3.17	-1.91	-4.70	-0.21	1.00	5.21	7.07	4.78
120	-0.90	1.38	1.32	-2.08	-0.99	-0.26	11.15	1.01	-1.22	-0.26
130	-0.90	-1.18	0.68	-0.05	-2.42	-0.12	1.05	0.15	0.82	-1.60
140	0.41	1.19	-1.14	-0.04	0.69	-0.06	1.89	-2.15	1.06	-1.52
150	1.07	2.75	-0.44	0.93	-0.29	-0.16	0.09	-2.01	0.36	-0.29
160	-0.92	1351.08	-0.55	0.45	1.16	1.96	0.20	0.36	-0.12	0.27
170	0.29	0.37	-1.57	1.14	-1.65	-0.41	-0.21	-5.76	0.89	1.41
180	2.75	1.63	-2.10	1.45	-1.88	-0.90	2.63	-5.59	0.78	-0.86
190	3.07	-2.01	-3.68	-2.23	0.29	-25.74	0.32	-0.13	-0.66	-0.66
200	-6.52	1.29	-0.30	7.15	-0.75	4.90	0.98	0.19	0.27	-2.05
210	0.21	-0.08	-0.21	-0.57	0.03	-2.60	3.67	-1.32	-6.99	1.07
220	-0.98	-2.98	-0.74	-1.99	0.11	1.36	-1.33	-1.17	-0.08	-1.08
230	0.43	2.39	-0.09	0.28	-1.07	-0.27	-0.36	1.43	-0.74	-8.23
240	-0.51	0.63	-28.60	6.41	-14.29	1.35	1.95	4.94	0.32	1.29
250	1.45	-0.42	20.26	-4.13	0.66	-1.63	-0.64	1.56	0.81	2.55
260	0.15	5.43	-0.92	0.14	1.32	2.68	-0.12	-0.05	-0.66	0.80
270	-0.90	15.05	0.35	-0.97	6.79	2.51	-2.56	-1.20	-0.12	-0.46
280	-0.07	-0.37	0.02	0.30	0.69	0.67	0.36	4.20	1.33	-0.50
290	6.63	3.26	-0.03	0.27	1.14	-0.42	-4.45	1.04	115.90	-2.08
300	0.63	0.42	-0.08	-1.09	-0.67	-0.25	2.22	-0.36	-0.38	111.43
310	0.20	-0.35	-13.15	-0.45	4.38	0.47	-0.16	0.63	1.17	-0.25
320	1.53	0.76	-0.04	-1.68	-8.78	0.47	0.02	-0.43	5.57	0.10
330	-22.55	0.87	1.78	-0.11	1.36	-3.64	-0.46	-2.07	0.57	-6.27
340	-1.08	4.58	-1.94	-0.42	0.12	-1.03	-0.26	-0.63	0.15	-2.28
350	2.24	0.72	1.50	-0.11	-2.34	6.32	1.29	-46.87	-0.20	-1.16
360	-5.36	0.84	0.86	-0.57	1.06	0.44	-1.05	0.51	1.66	0.65
370	-1.18	-2.31	-2.26	0.48	0.17	-2.59	2.87	-14.14	-7.46	-3.61

380	1.95	0.00	4.72	0.81	-0.08	-0.77	-129.04	0.01	0.76	-1.74
390	1.86	0.78	-0.65	18.22	1.66	-2.86	1.37	0.03	1.56	-0.26
400	-0.50	-0.34	-0.84	-0.12	-0.81	-0.44	1.10	-3.23	35.43	1.78
410	6.02	-0.79	-0.72	-0.87	-0.38	-0.52	-0.30	0.96	0.02	0.52
420	1.73	0.90	1.71	-0.30	-0.59	1.66	1.99	0.60	-0.47	-1.50
430	-0.50	1.36	-10.08	-1.33	-2.15	0.20	-1.39	0.55	-0.57	-2.38
440	2.66	-0.94	95.81	-5.90	-0.58	-2.80	2.52	3.36	0.52	730.04
450	-0.97	-2.37	-1.98	0.44	-4.63	0.17	-0.46	-4.32	-0.62	0.83
460	-1.71	-2.95	1.07	2.21	6.46	0.67	-0.77	-1.02	5.24	-0.86
470	-0.10	0.00	-3.43	0.02	-0.33	0.76	0.27	-1.37	-0.55	1.17
480	-0.11	1.20	-0.51	0.47	-16.94	-1.01	-8.65	-1.73	-0.97	-0.16
490	-0.87	6.49	0.83	-5.21	0.54	-0.37	-1.70	-0.03	0.53	0.42
500	0.08	0.63	0.22	2.46	0.11	-0.08	1.19	0.03	0.37	1.57

20 – Approfondimenti e cenni ad altri argomenti

Sono qui presentati alcuni argomenti fuori programma, riportati per completezza, riferimento o per curiosità.

Unità di misura americane e britanniche

Da http://ts.nist.gov/ts/htdocs/230/235/h4402/appenc.pdf, sito del NIST.

TABLES OF U.S. UNITS OF MEASUREMENThttp://ts.nist.gov/ts/htdocs/230/235/appxc/appxc.htm - footnote2#footnote2

In these tables where foot or mile is underlined, it is survey foot or U.S. statute mile rather than international foot or mile that is meant.

Units of Length

12 inches (in)	= 1 foot (ft)
3 feet	= 1 yard (yd)
16-1/2 feet	= 1 rod (rd), pole, or perch
40 rods	= 1 furlong (fur) = 660 feet
8 furlongs	= 1 U.S. statute mile (mi) = 5280 feet
1852 meters	= 6076.115 49 feet (approximately)
	= 1 international nautical mile

Units of Areahttp://ts.nist.gov/ts/htdocs/230/235/appxc/appxc.htm - footnote3#footnote3

144 square inches (in2)	= 1 square foot (ft2)
9 square feet	= 1 square yard (yd2)
	= 1296 square inches
272-1/4 square feet	= 1 square rod (sq rd)
160 square rods	= 1 acre = 43 560 square feet
640 acre	= 1 square mile (mi2)
1 mile square	= 1 section of land
6 miles square	= 1 township
	= 36 sections = 36 square miles

Units of Volumehttp://ts.nist.gov/ts/htdocs/230/235/appxc/appxc.htm - footnote3#footnote3

1728 cubic inches (in3)	= 1 cubic foot (ft3)
27 cubic feet	= 1 cubic yard (yd3)

Gunter's or Surveyors Chain Units of Measurement

0.66 foot (ft)	= 1 link (li)
100 links	= 1 chain (ch)
	= 4 rods = 66 feet
80 chains	= 1 U.S. statute mile (mi)
	= 320 rods = 5280 feet

Units of Liquid Volumehttp://ts.nist.gov/ts/htdocs/230/235/appxc/appxc.htm - footnote4#footnote4

4 gills (gi)	= 1 pint (pt)= 28.875 cubic inches
2 pints	= 1 quart (qt) = 57.75 cubic inches
4 quarts	= 1 gallon (gal) = 231 cubic inches
	= 8 pints = 32 gills

Apothecaries Units of Liquid Volume

60 minims (min or ♏)	= 1 fluid dram (fl dr or ƒʒ)
	= 0.225 6 cubic inch
8 fluid drams	= 1 fluid ounce (fl oz or ƒ℥)
	= 1.804 7 cubic inches
16 fluid ounces	= 1 pint (pt or O)
	= 28.875 cubic inches
	= 128 fluid drams
2 pints	= 1 quart (qt) = 57.75 cubic inches
	= 32 fluid ounces = 256 fluid drams
4 quarts	= 1 gallon (gal) = 231 cubic inches
	= 128 fluid ounces = 1024 fluid drams

Units of Dry Volumehttp://ts.nist.gov/ts/htdocs/230/235/appxc/appxc.htm - footnote5#footnote5

2 pints (pt)	= 1 quart (qt) = 67.200 6 cubic inches
8 quarts	= 1 peck (pk) = 537.605 cubic inches
	= 16 pints
4 pecks	= 1 bushel (bu) = 2150.42 cubic inches
	= 32 quarts

Avoirdupois Units of Masshttp://ts.nist.gov/ts/htdocs/230/235/appxc/appxc.htm - footnote6#footnote6

[The "grain" is the same in avoirdupois, troy, and apothecaries units of mass.]

27-11/32 grains = 1 dram (dr)

16 drams	= 1 ounce (oz)
	= 437-1/2 grains
16 ounces	= 1 pound (lb)
	= 256 drams
	= 7000 grains
100 pounds	= 1 hundredweight (cwt)http://ts.nist.gov/ts/htdocs/230/235/appxc/appxc.htm - footnote7#footnote7
20 hundredweights	= 1 ton
	= 2000 pounds[7]

In "gross" or "long" measure, the following values are recognized:

112 pounds	= 1 gross or long hundredweight[7]
20 gross or long hundredweights	= 1 gross or long ton
	= 2240 pounds[7]

Troy Units of Mass

[The "grain" is the same in avoirdupois, troy, and apothecaries units of mass.]

24 grains	= 1 pennyweight (dwt)
20 pennyweights	= 1 ounce troy (oz t)= 480 grains
12 ounces troy	= 1 pound troy (lb t)
	= 240 pennyweights = 5760 grains

Apothecaries Units of Mass

[The "grain" is the same in avoirdupois, troy, and apothecaries units of mass.]

20 grains	= 1 scruple (s ap or ℈)
3 scruples	= 1 dram apothe-caries (dr ap or ʒ)
	= 60 grains
8 drams apothecaries	= 1 ounce apothecaries (oz ap or ℥)
	= 24 scruples = 480 grains
12 ounces apothecaries	= 1 pound apothecaries (lb ap)
	= 96 drams apothecaries
	= 288 scruples = 5760 grains

NOTES ON BRITISH UNITS OF MEASUREMENT

In Great Britain, the yard, the avoirdupois pound, the troy pound, and the apothecaries pound areidentical with the units of the same names used in the United States. The tables of British linear measure, troy mass, and apothecaries mass are the same as the corresponding United States tables, except for the British spelling "drachm" in the table of apothecaries mass. The table of British avoirdupois mass is the same as the United States table up to 1 pound; above that point the table reads:

14 pounds	= 1 stone
2 stones	= 1 quarter = 28 pounds
4 quarters	= 1 hundredweight = 112 pounds
20 hundredweight	= 1 ton = 2240 pounds

The present British gallon and bushel--known as the "Imperial gallon" and "Imperial bushel" are, respectively, about 20 percent and 3 percent larger than the United States gallon and bushel. The Imperial gallon is defined as the volume of 10 avoirdupois pounds of water under specified conditions, and the Imperial bushel is defined as 8 Imperial gallons. Also, the subdivision of the Imperial gallon as presented in the table of British apothecaries fluid measure differs in two important respects from the corresponding United States subdivision, in that the Imperial gallon is divided into 160 fluid ounces (whereas the United States gallon is divided into 128 fluid ounces), and a "fluid scruple" is included. The full table of British measures of capacity (which are used alike for liquid and for dry commodities) is as follows

4 gills	= 1 pint
2 pints	= 1 quart
4 quart	= 1 gallon
2 gallons	= 1 peck
8 gallons (4 pecks)	= 1 bushel
8 bushels	= 1quarter

The full table of British apothecaries measure is as follows

20 minims	= 1 fluid scruple
3 fluid scruples	= 1 fluid drachm
	= 60 minims
8 fluid drachm	= 1 fluid ounce
20 fluid ounces	= 1 pint
8 pints	= 1 gallon (160 fluid ounces)

Strumenti digitali e conversione analogico-digitale

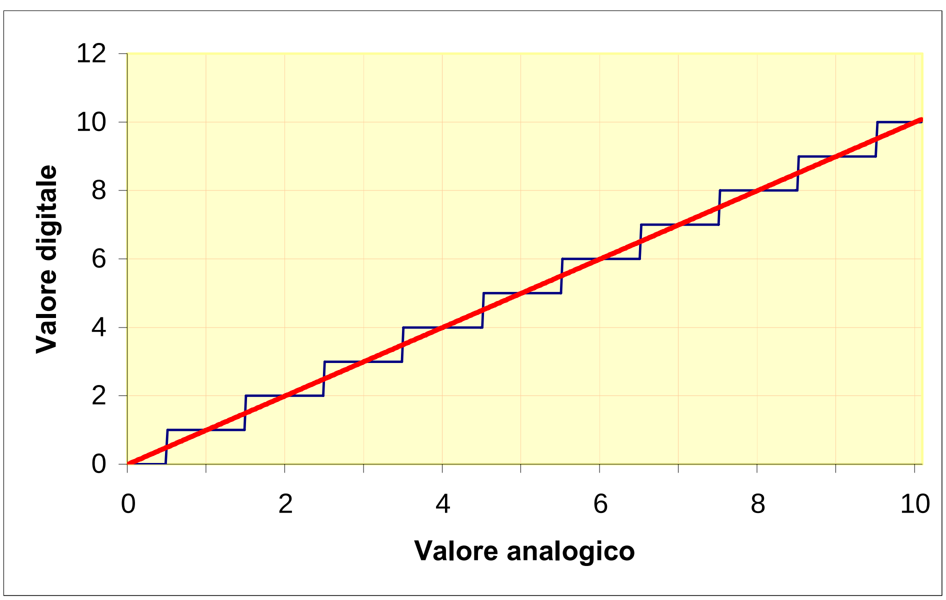
Lo sviluppo (da alcuni decenni) dell'elettronica digitale[7] ha permesso la realizzazione di nuovi strumenti di misura che si caratterizzano per la presenza di un display che indica in forma numerica il risultato della misura.

Tali sistemi offrono vari vantaggi, per esempio un più semplice modo di uso, un minor costo, spesso una maggiore precisione. Inoltre sono spesso presenti caratteristiche di grande utilità, come memorie, procedure di auto-taratura, sistemi di protezione contro un uso non corretto, eccetera.

Di base uno strumento di misura digitale è composto da

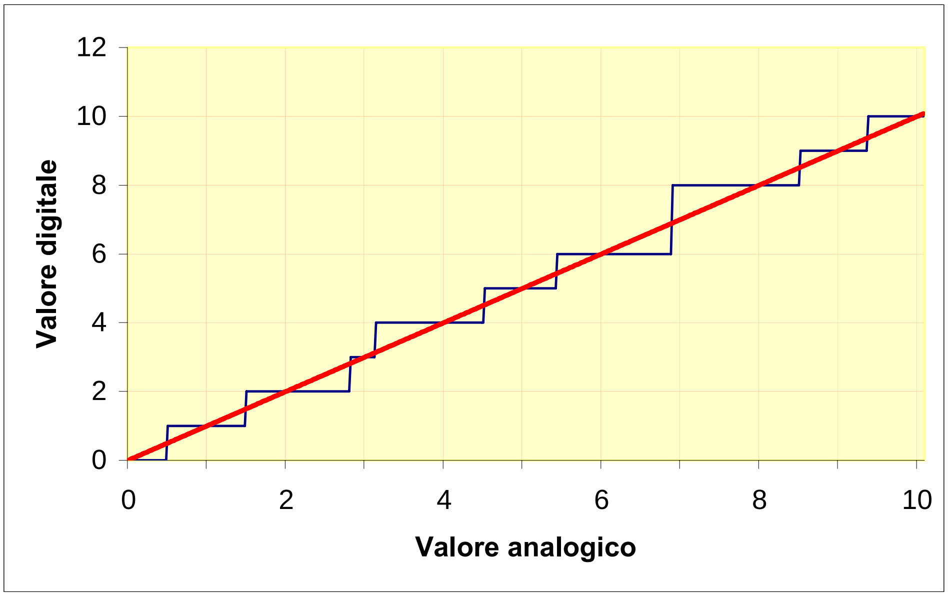
- un sensore, che trasforma la grandezza in misura in una grandezza elettrica, quasi sempre una tensione in un certo range di valori (la grandezza analogica)
- un convertitore analogico-digitale, che trasforma la grandezza analogica in una sequenza di bit, cioè una successione di valori di tensione rappresentanti i valori binari 1 e 0, che rappresenta un numero intero in base 2
- un circuito di elaborazione logica (in genere un microprocessore) che esegue varie procedure, tra cui essenziale la trasformazione del numero binario in un numero decimale rappresentante la misura in opportune unità
- un display (numerico o grafico) che mostra il risultato della misura

Il convertitore analogico digitale (in sigla ADC, analog to digital converter) trasforma una tensione elettrica variabile in un certo range in un numero intero binario compreso in genere tra 0 e $2^N - 1$, essendo N il numero di bit del convertitore (di solito da 8 a 16). Nel caso ideale la conversione è di questo tipo:



[7] Distinguiamo l'elettronica analogica, che studia circuiti come gli amplificatori, gli oscillatori, i modulatori, eccetera, dall'elettronica digitale, che studia circuiti che realizzano porte logiche, flip-flop, microprocessori, eccetera.

In pratica piccoli errori nel dispositivo ADC fanno sì che la situazione sia di questo tipo:



In situazioni peggiori, il legame tra il valore analogico e quello digitale potrebbe anche essere non monotono.

La scala logaritmica

Talora occorre rappresentare sull'asse di un grafico una grandezza, sempre positiva, i cui valori minimo e massimo m ed M siano tali che $\frac{M}{m}$ sia molto elevato (per esempio maggiore di 100). L'uso della normale scala lineare può essere scomodo, perché rende non apprezzabili le variazioni intorno ai valori piccoli (ciò è evidente nel caso in cui gli effetti che si vogliono evidenziare sono proporzionali al valore della grandezza.
In questo caso si può usare con profitto la scala logaritmica. Ciò si può fare o rappresentando su scala lineare il logaritmo della grandezza in questione o usando carte con scale logaritmiche (vedi capitolo 6).

Un caso particolare è quando la grandezza da rappresentare è la variabile indipendente, cioè i cui valori li scegliamo noi. In tal caso sceglieremo valori che costituiscono una progressione geometrica, cioè, scelto un numero **a** chiamato "ragione", i valori che sceglieremo saranno

$$\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \cdot a \\ x_3 \cdot a^2 \\ . \\ . \\ x_k \cdot a^{k-1} \end{array} \qquad (20.1)$$

Si noti che il rapporto tra un valore e il precedente è sempre **a**.

In pratica è però più comodo apportare una piccola variazione a questa scelta: innanzitutto si sceglie il numero di punti per "decade" di variazione della grandezza, e questo spesso è 1 o 2 o 3, quindi si definiscono i valori "comodi" per ogni decade.
In genere si sceglie:

- un punto per decade (ragione 10): 1, 10, 100, 1000,…
- due punti per decade (ragione circa 3): 1, 3, 10, 30, 100, 300, 1000,…
- tre punti per decade (ragione circa 2): 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000,…

Come si vede, la ragione non è esattamente le stessa, ma il valore dei punti è molto comodo.

Il teorema di Bayes

Supponiamo di avere un evento **A** che può essere causato da uno ed uno solo di **N** eventi $\mathbf{B_1, B_2, \ldots B_N}$, mutuamente esclusivi. Supponiamo di conoscere le N probabilità condizionate $\mathbf{P(A|B_i)}$ che capiti **A** se è capitato $\mathbf{B_i}$.

Se osserviamo **A**, possiamo chiederci quale degli **N** eventi $\mathbf{B_i}$ lo ha causato, o meglio quale è la probabilità che è accaduto $\mathbf{B_i}$ avendo osservato **A**.
Si dimostra che (Teorema di Bayes)

(20.2)
$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}{\sum_{k=1}^{N} P(B_k) \cdot P(A \mid B_k)}$$

Si noti che, con questa relazione, si passa dalle probabilità $\mathbf{P(A|B_i)}$ alle $\mathbf{P(B_i|A)}$, cioè dall'informazione sull'effetto delle $\mathbf{B_i}$ su **A**, tramite anche le $\mathbf{P(B_i)}$, a "inferire" sulle cause dell'evento osservato **A**.

Il teorema di Bayes, nel caso di una variabile casuale continua, diventa

(20.3)
$$f(x \mid y) = \frac{f_1(y \mid x) \cdot f_0(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y \mid x) \cdot f_0(x) \cdot dx}$$

dove f_0 è la distribuzione della variabile x e f_1 la distribuzione condizionale di y dato x.

Varianza della binomiale

Ricordiamo che il valor medio della distribuzione binomiale è $\mu = E[k] = N \cdot p$. Per la varianza dobbiamo calcolare

(20.4) $$\sigma^2 = E[(k-\mu)^2] = \sum_{k=0}^{N} (k-\mu)^2 \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

Sviluppiamo la derivata seconda della potenza N-esima del binomio (p+q). Abbiamo

(20.5) $$\frac{\partial^2 (p+q)^N}{\partial p^N} = N(N-1)(p+q)^{N-2} = \sum_k k(k-1) \binom{N}{k} p^{k-2} q^{N-k}$$

moltiplichiamo gli ultimi due membri per p^2; abbiamo

(20.6) $$\begin{aligned} & N(N-1)p^2 = N^2 p^2 - Np^2 = \sum_k k(k-1) \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = \\ & = E[k(k-1)] = E[k^2] - E[k] \end{aligned}$$

ora

(20.7) $$\sigma^2 = E[(k-\mu)^2] = E[k^2] - 2\mu \cdot E[k] + \mu^2 = E[k^2] - \mu^2$$

che possiamo scrivere come

(20.8) $$\begin{aligned} & \sigma^2 = (E[k^2] - E[k]) + E[k] - E[k]^2 = \\ & = \cancel{N^2 p^2} - Np^2 + Np - \cancel{N^2 p^2} = Np(1-p) = Npq \end{aligned}$$

q.e.d. .

La distribuzione t di Student (statistica per piccoli campioni)

Supponiamo di avere un campione casuale di dimensione N $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ estratto da una popolazione normale di media μ e deviazione standard σ (per esempio N misure indipendenti di una certa grandezza fisica, con errore casuale gaussiano).

Calcoliamo la media e la varianza campionaria

(20.9)
$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

e

(20.10)
$$S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

La variabile

(20.11)
$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{N}}$$

(analoga alla variabile z) segue la distribuzione t di Student, con N-1 gradi di libertà.

Tale distribuzione è

(20.12)
$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{M+1}{2}\right)}{\sqrt{M\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{M}{2}\right)}\cdot\left(1+\frac{x^2}{M}\right)^{-\frac{M+1}{2}}$$

dove M è chiamato "numero dei gradi di libertà); ha media nulla e deviazione standard $\sigma = \sqrt{\frac{M}{M-2}}$.

Per M grande tende a una gaussiana, per M=1 è una distribuzione di Cauchy. È in genere una distribuzione a campana con code più pesanti di una gaussiana.

La stima bayesiana

La stima bayesiana integra informazioni *a priori* sulla grandezza da stimare e osservazioni (misure sperimentali), in modo da utilizzare al meglio tutte le informazioni disponibili.

Si noti che le informazioni a priori possono essere ricavate anche da misure precedenti; esse sono condensate nella **distribuzione a priori** sulla grandezza in esame. Da questa e dal risultato delle misure cambia lo stato di informazione, che è condensato nella **distribuzione a posteriori**. La teoria della stima bayesiana indica il modo di calcolarla.

Si può quindi utilizzare quest'ultima come distribuzione a priori per successive misure.

Se non si sa nulla "a priori", a parte vagamente il possibile intervallo della grandezza, si suppone una distribuzione a priori uniforme nell'intervallo.

I test non parametrici

Una caratteristica importante di un test statistico è la robustezza, cioè la qualità di essere efficace indipendentemente dalla distribuzione dei dati a cui si applica.

Per costruire test robusti, si è sviluppata la statistica non-parametrica (da contrapporsi a quella "parametrica" così chiamata per i parametri delle distribuzioni che si suppone seguano i dati). Presentiamo qui alcuni semplici test di statistica non-parametrica.

Test dei segni per la mediana

Nel caso di distribuzione simmetrica, questo è anche un test per il valor medio.

Si supponga di avere una successione $\{x_i\}=\{x_1, x_2,\ldots,x_N\}$ di dati e vogliamo testare se **m** è la mediana.
Per far ciò, calcoliamo i segni dei valori $\{x_i-m\}$**.** Consideriamo il numero k dei valori positivi. Se **m** è la mediana, **k** deve essere distribuito secondo una binomiale con parametri **p**=0.5 e **N**. Possiamo quindi eseguire un test con questa binomiale.

Test di Wilcoxon-Mann_Whitney

Usato per testare se due popolazioni sono statisticamente eguali.

Siano $\{x_1, x_2,\ldots,x_N\}$ e $\{y_1, y_2,\ldots,y_M\}$ i campioni estratti dalle due popolazioni.
Si ordinano tutti in una singola successione. Associamo quindi a ciascun elemento il numero d'ordine che gli compete in questa nuova successione. Calcoliamo quindi W_1 e W_2, le somme dei numeri d'ordine per i dati del primo gruppo e del secondo gruppo. Costruiamo quindi le due variabili

(20.13)
$$U_1 = W_1 - \frac{N\cdot(N-1)}{2}$$

e

(20.14)
$$U_2 = W_2 - \frac{M\cdot(M-1)}{2}$$

Sotto l'ipotesi nulla, che i due campioni vengono dalla stessa popolazione, si trova che, per la variabile U_1, si ha

(20.15)
$$\mu_{U_1} = \frac{N\cdot M}{2}$$

e

(20.16)
$$\sigma_{U_1}^2 = \frac{M \cdot N \cdot (N+M+1)}{12}$$

Per N e M maggiori di 8, la distribuzione di U_1 è approssimabile con una gaussiana, per cui si può fare un test gaussiano.

Test di casualità

Data una successione di due simboli (per esempio testa e croce), si può testare la sua casualità contando il numero dei "run", cioè il numero di gruppi di simboli uguali contigui.

Se una successione contiene un numero $\mathbf{N_1}$ di simboli del primo tipo e un numero $\mathbf{N_2}$ di simboli del secondo, si trova che, se è casuale, il numero dei run, di tutte le lunghezze, ha una distribuzione approssimabile a una gaussiana con parametri

(20.17)
$$\mu = \frac{2N_1N_2}{N_1+N_2} + 1$$

e

(20.18)
$$\sigma = \sqrt{\frac{2N_1N_2(2N_1N_2 - N_1 - N_2)}{(N_1+N_2)^2(N_1+N_2-1)}}$$

e si può fare quindi un test gaussiano.

Il metodo di Montecarlo

I metodi statistici sono spesso usati per eseguire calcoli numerici che tipicamente sono svolti con l'uso dell'analisi o dell'analisi numerica. Oppure per eseguire ed analizzare simulazioni di sistemi complessi.
Queste applicazioni della statistica al calcolo sono denominate "metodo di Montecarlo" così chiamato dalla località del noto Casino (ancora un termine che collega il gioco d'azzardo e il calcolo delle probabilità), introdotto dal matematico Stanislaw Ulam (1909-1984).

Indichiamo qui due semplici applicazioni del metodo:

- **L'ago di Buffon**, metodo statistico proposto dal naturalista francese Georges-Louis Leclerc Buffon (1707-1788) per calcolare il valore di π. Si tracciano su un piano orizzontale delle linee parallele a distanza **d** l'una dalla successiva. Si lasci poi cadere in modo casuale un ago di lunghezza **d** su questo piano. Si dimostra che la probabilità che l'ago "tagli" una delle linee parallele è $p = \frac{2}{\pi}$. Quindi eseguendo molti lanci dell'ago e calcolando la frequenza delle volte che l'ago incrocia le linee, si ha una stima di p e quindi, invertendo questa stima e moltiplicandola per 2, una stima di π.

- **Calcolo dell'area** di una figura piana complicata. In tal caso iscriviamo la figura in un quadrato di area nota. Scegliamo quindi dei punti del quadrato a caso (in modo uniforme su tutto il quadrato) e contiamo il numero dei punti che capitano all'interno della figura. Una stima dell'area è data dall'area del quadrato, moltiplicato il rapporto tra il numero dei punti interni e di tutti i punti. Questa tecnica può generalizzarsi al calcolo dei volumi di solidi o anche ad iper-volumi in più di 3 dimensioni.

Il "cuore" del metodo di Montecarlo è la generazione di numeri casuali. Nei calcolatori questi vengono generati da apposite funzioni[8]. La funzione base genera semplicemente numeri casuali distribuiti uniformemente tra 0 e 1, e da questi sono poi generati numeri con altre distribuzioni.

[8] In effetti i numeri generati dal calcolatore non sono casuali, ma, se non se ne usano troppi, hanno molte delle proprietà statistiche dei numeri casuali. Per questo vengono chiamati "pseudo-casuali".

Suggerimenti per la stesura delle relazioni

Le relazioni delle esperienze sono compilate individualmente da ciascuno studente indipendentemente (a parte le misure effettuate).
Vanno svolte su un quaderno o un raccoglitore grande (formato A4). Possono anche essere scritte con un word processor.

È bene che le pagine, le tabelle, le figure e le formule siano numerate, almeno quando se ne fa riferimento nel testo.

Ogni relazione deve riportare il titolo dell'esperienza, la data, i componenti del gruppo.

Va riportato all'inizio brevemente lo scopo dell'esperienza e il materiale a disposizione ed eventualmente lo schema dell'apparato, con le eventuali dimensioni di interesse. Per gli strumenti a disposizione, riportare la sensibilità.

Si può fare una, molto breve, introduzione teorica, riportando le formule teoriche che si useranno.

Vanno riportate le misure effettuate (eventualmente anche in fotocopia), eventualmente organizzate in tabelle ordinate. Riportare inoltre le incertezze delle misure effettuate.

Elaborare i dati e presentare i risultati, con eventuali brevi commenti sulla procedura e sui problemi trovati.
Qualsiasi elaborazione dei dati (per esempio misure indirette, valutazione dell'incertezza,…) deve riportare la formula teorica.
Qualsiasi risultato finale deve essere scritto con l'incertezza, nel modo corretto (vedi capitolo 4).

Evidenziare ogni risultato inaspettato o "strano".

I grafici devono avere le unità sugli assi e i punti sperimentali devono riportare le incertezze, se apprezzabili, per entrambe le variabili indipendente e dipendente.
Evitare di interpolare tra i punti sperimentali se non con rette (a parte casi particolari, con fit non lineari fatti al calcolatore).

Per alcune esperienze viene fornita una scheda riassuntiva che va allegata alla fine della relazione.

Figure, tabelle, fotocopie delle misure originali e la scheda riassuntiva possono essere incollate sui fogli del quaderno.

È molto importante organizzare in modo ordinato le informazione nella relazione.

La misura di g

L'accelerazione di gravità **g** è una grandezza che varia innanzitutto a seconda della latitudine del luogo φ e della sua altezza sul livello del mare **h**

(20.19)

$$g = 9.780327 \cdot \left(1 + 0.0053024 \cdot \sin^2 \varphi - 0.0000058 \cdot \sin^2 2\varphi - 0.0000003155 \cdot h\right) m/s^2$$

dove h è misurata in metri.

Ulteriori variazioni sono dovute alle maree terrestri e a particolari strutture nel sottosuolo. Per questo sono utili precise misure di g. Queste vengono fatte con strumenti chiamati gravimetri, e riportiamo le caratteristiche di uno di questi strumenti.

(Il gal o Gal è una unità (non SI) di misura dell'accelerazione (e quindi di g), pari a 1 cm/s^2).

Il gravimetro LaCoste-Romberg Aliod 100 e le sue caratteristiche (misure **relative** di gravità)

System Specifications

Principle :	Linear electrostatic beam nulling
Range:	100 mGal
Data Resolution:	0.01 (0.001 mGal for Aliod 100x**)
Repeatability:	0.01 to 0.02 mGal
Linearity:	Better than 0.01% Full Scale
Electronic Drift:	<0.001 mGal /1000 hr.
Temp. Range:	-40°C to +45°C
Integrated LCD:	2x20 character LCD with backlight
Output:	RS-232, External Port
Data Logging:	Continuous w/iQue™ handheld
Data storage:	SD Flash Card
Tide Correction:	Automatic
Power Consumption:	12 Volts@0.190 Amp/2.3 Watts
Input:	10-15 VDC

* Electronic Levels required
** Export License may be required

Specifications subject to change.
iQue is a trademark of GARMIN

Una leggenda urbana

(rielaborato da un articolo pubblicato da Alexander Calandra su Saturday Review, Dec 21, 1968)
(argomento semi-serio)

È riferita come una storia vera (?).
All'esame di Fisica, venne chiesto ad uno studente come eseguire la misura dell'altezza di un edificio utilizzando un barometro.
Dopo una breve riflessione lo studente rispose:
"Lego un filo al barometro, lo calo giù dalla tetto fino a terra e misuro la lunghezza del filo".
L'esaminatore, perplesso, gli disse che questo metodo, sebbene raggiungesse lo scopo, non mostrava nessuna conoscenza di Fisica e quello era un esame di Fisica. Gli ripropose la domanda, specificando che si usassero conoscenze di Fisica.
Lo studente ci pensò un po' e poi rispose:
"Porto il barometro sul tetto, lo lascio cadere misurando il tempo di caduta e, conoscendo l'accelerazione di gravità, ricavo l'altezza dell'edificio".
All'esaminatore non era chiaro se lo studente stesse scherzando o se semplicemente ignorasse la legge di variazione della pressione atmosferica con l'altezza sul livello del mare e quindi gli chiese se conoscesse altri metodi. Lo studente rispose:
"Certo, ce ne sono vari. Per esempio, senza salire sul tetto, in una giornata di sole posso misurare l'altezza dell'ombra del barometro e la lunghezza di quella dell'edificio e dal rapporto tra le due e dall'altezza del barometro ricavo quella dell'edificio. Oppure, se l'edificio ha una scala esterna, posso segnare sul muro ripetutamente la lunghezza del barometro e contare quanti segni ho fatto (valutando anche l'ultima frazione). Un altro modo, più sofisticato, è attaccare il barometro a un filo e lasciarlo pendolare, misurando poi il periodo di oscillazione a terra e sul tetto: dalla differenza di valore misurato si può calcolare la differenza di g (che dipende dall'altezza sul livello del mare) e quindi l'altezza dell'edificio. Ma probabilmente il metodo migliore è andare dall'amministratore e offrirgli il barometro in cambio dell'informazione sull'altezza dell'edificio".
L'esaminatore esasperato gli chiese se conoscesse un metodo che facesse un uso "proprio" del barometro. A questo punto pare che lo studente abbia risposto che sì, lo conosceva, ma che era stufo di istruttori che cercavano di insegnargli come si dovesse pensare e che riteneva più interessante esplorare possibilità non ovvie.

Analisi dei metodi di misura proposti dallo studente

Lo studente "creativo" del racconto precedente ha proposto vari metodi di misura. Analizziamoli brevemente alla luce degli argomenti sviluppati in questo corso.

Innanzitutto si parla dell'altezza di un edificio. Cosa è ? L'altezza dal terreno (dal marciapiede o dal piano stradale ? e se il terreno non è assolutamente in piano, da dove ?) al tetto (contano eventuali pennoni o antenne ?). Si deve comunque fare un modello semplificato (vedi capitolo 1) dell'edificio e identificare l'altezza come uno dei parametri di questo modello.

Inoltre supponiamo che il "valore vero" dell'altezza dell'edificio sia 20 m. Dovremo inoltre fare delle ipotesi anche sulle caratteristiche del barometro e su quella della strumentazione ausiliaria per fare le varie misure (cronometro, misuratore di lunghezza, ecc.), che in effetti non erano stati previsti dall'esaminatore.

Analizziamo ora i vari metodi proposti:

a) Calare il barometro dal tetto con un filo e misurare la lunghezza del filo

La misura è semplice. Con un po' di cura (fare attenzione all'elasticità del filo, alle variazioni di temperatura e alla metodologia di misura) si può ragionevolmente arrivare ad incertezze relative dell'ordine di 0.001.

b) Lasciar cadere il barometro dal tetto e misurare il tempo di caduta

L'equazione è

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

la g del luogo si può supporre nota con almeno 4 cifre significative; inoltre la variazione di g con l'altezza, per 20 m, è dell'ordine di circa 6 parti per milione (vedi paragrafo precedente sulla misura di g) e quindi è trascurabile. Se il tempo di caduta (circa 2 secondi) viene misurato con l'incertezza di 0.1 secondi (quindi con l'incertezza relativa di 0.05), si ha un'incertezza relativa su h di circa 0.1 . Con un migliore metodo di misura si può ovviamente migliorare l'incertezza (ma attenzione alla resistenza dell'aria).

c) Misura delle ombre

Dato che il sole non è una sorgente luminosa puntiforme, il contorno delle ombre non è ben definito. Inoltre se le forme dell'edificio e del barometro sono un po' complicate, la misura non è facilissima. Una valutazione dell'altezza con incertezza relativa di circa 0.02 dovrebbe essere comunque possibile.

d) Usare il barometro come righello

Supponiamo che il barometro sia alto un metro e nel riportarne la lunghezza sul muro esterno commettiamo un errore casuale di cinque millimetri. In tal caso l'incertezza assoluta è $\frac{20 \cdot 5\, mm}{\sqrt{20}} = 5 \cdot \sqrt{20}\, mm \approx 20\, mm$, quindi un'incertezza relativa di circa 0.001 .

e) Usare il barometro come pendolo

Tra il tetto e il livello stradale la variazione di g è circa di 6 parti per milione. È difficile fare misure di periodo per un pendolo rozzo come un barometro attaccato a un filo con precisioni di quest'ordine.

Se la misura di g, invece che con un rozzo pendolo fosse fatta con un buon gravimetro (incertezza relativa dell'ordine di 10^{-9} o meglio), la misura di altezza dell'edificio potrebbe farsi molto bene (anzi sarebbe uno dei metodi migliori).

f) "Corrompere" l'amministratore

L'amministratore ha probabilmente i valori di progetto. Questa ovviamente non è una misura. Potrebbe essere interessante confrontare una misura accurata con i valori di progetto. Se ci fossero delle forti discrepanze non giustificate da validi motivi, ci si potrebbe preoccupare.

g) Uso "proprio" del barometro

Supponiamo che il barometro usato sia un barometro a mercurio, per esempio del tipo di Fortin, che permette misure di alta sensibilità (con un nonio si riesce a valutare il decimo di millimetro di mercurio).

Anche senza conoscere la legge di variazione della pressione atmosferica con l'altezza sul livello del mare ($P = P_0 \cdot e^{-\frac{h}{k}}$, dove P_0 è la pressione al livello del mare, h l'altezza sul livello del mare e k una costante pari a circa 8500 m), si può valutare l'altezza dell'edificio semplicemente conoscendo il rapporto tra le densità del mercurio e dell'aria (in condizioni standard di temperatura e pressione), che è $\frac{13.6 \cdot 10^3}{1.29} = 10540$, e facendo una misura di differenza di pressione $D = (P_{strada} - P_{tetto})$ tra il livello stradale e il tetto. Misurando D in millimetri di mercurio (per un edificio di 20 m, vale circa 1.9 mm), si ha per l'altezza h dell'edificio espressa in metri:

$$h = D \cdot 10.54$$

L'incertezza su h è dovuta all'incertezza su D. Dato il legame lineare tra le due grandezze, l'incertezza relativa su h è pari a quella su D , che è circa 0.05.

Qualche sito di interesse per il corso

Siti locali

Sito del corso : http://grwavsf.roma1.infn.it/lsm

Sito di SnagLab: http://grwavsf.roma1.infn.it/snaglab

Sito del Dipartimento : http://www.phys.uniroma1.it/

Istituzioni

L'Istituto Colonnetti : http://www.imgc.to.cnr.it/

Il Sistema Internazionale : http://www.imgc.to.cnr.it/SI/sommario.htm

Beaureau International des Poids et Measures : http://www.bipm.fr/

The Meter Convention : http://www1.bipm.org/en/convention/

National Institute of Standard and Technology : http://www.nist.gov/

Physical Reference Data (constants, units, uncertainties) : http://physics.nist.gov/cuu/

Applet

L'ago di Buffon : http://www.mste.uiuc.edu/reese/buffon/bufjava.html

Statistical Java : http://www.stat.vt.edu/~sundar/java/applets/

Alfabeto greco

Α	α	**alfa**
Β	β	**beta**
Γ	γ	**gamma**
Δ	δ	**delta**
Ε	ε	**epsilon**
Ζ	ζ	**zeta**
Η	η	**eta**
Θ	θ, ϑ	**theta**
Ι	ι	**iota**
Κ	κ	**kappa**
Λ	λ	**lambda**
Μ	μ	**mu**
Ν	ν	**nu**
Ξ	ξ	**xi**
Ο	ο	**omicron**
Π	π	**pi**
Ρ	ρ	**rho**
Σ	σ, ς	**sigma**
Τ	τ	**tau**
Υ	υ	**upsilon**
Φ	φ, ϕ	**phi**
Χ	χ	**chi**
Ψ	ψ	**psi**
Ω	ω	**omega**

Uso di SnagLab

Introduzione

SnagLab è un programma orientato all'analisi dei dati sperimentali.
I dati possono essere letti da file o immessi in modo interattivo.
La versione attuale è scritta in Visual Basic 6, in ambiente Windows (Windows 98 e successivi); è in (lento) sviluppo una versione in C#.
Alla partenza del programma viene creato nel folder temporaneo dell'utente un file di log SnagLab.log con varie informazioni e parametri calcolati.

Istallazione

L'ultima versione del programma è scaricabile da http://grwavsf.roma1.infn.it/snaglab .Per istallarlo, creare una cartella (per es. SnagLab) e metterci l'eseguibile e tutti gli eventuali file di supporto (dll e ocx) che dovessero mancare al sistema.

Uso

I GD

I dati sono immagazzinati in strutture chiamate GD (gruppi dati); questi sono numerati, a partire dal GD(0) che è il GD dove normalmente "entrano" i dati. I dati del GD(0) possono essere spostati in altri GD.
Esistono tre "gusti" di GD, a seconda del tipo di dati:

- **standard data**, in cui ogni dato è caratterizzato da ascissa, ordinata e loro incertezze
- **equal uncertainties**, in cui le incertezze sono le stesse per tutti i dati
- **sampled data**, in cui l'ascissa è virtuale, poiché si suppone che siano presi a tutti i multipli del tempo di campionamento. Questo è utile per i segnali.

La finestra "GD manager" mostra lo stato dei GD.
In ogni momento esiste un GD "a fuoco", su cui si opera automaticamente. Il GD a fuoco è in genere l'ultimo considerato. Si può modificare il GD a fuoco cliccando su una casella del GD manager o modificando le apposite caselle in alcune finestre di dialogo.

Altre strutture dati

MD: (Multiple GD) strutture dati contenenti più GD con le stesse ascisse.

DM: (Data Map: GD a due dimensioni) strutture dati con ascissa a due dimensioni (x,y). La dimensione x può essere "reale" (campionamento non uniforme) o "virtuale" (campionamento uniforme) ; la dimensione y è sempre virtuale. I DM sono trattati in modo analogo ai GD: c'è un DM manager, a cui si accede dal GD manager, da cui si possono visualizzare, come matrici o come mappe.
Alcune delle procedure di SnagLab sono specifiche dei DM, alcune possono applicarsi ai DM e ai GD.

Interfaccia iniziale

La finestra iniziale è composta da tre parti:

- l'albero delle procedure disponibili; le procedure si attivano cliccandoci sopra. Non tutte le procedure sono già attive; alcune procedure, come i fit, sono più comodamente attivabili dall'apposito menu dei grafici.
- la finestra delle informazioni; quando ci sono GD in uso, contiene un preview del GD "a fuoco"; se è "a fuoco" un GD non usato, viene visualizzato questo file.
- i tasti per accedere al GD manager, alla finestra di input standard dei dati e al Setup (anche il setup contiene alcune caratteristiche non ancora o non ancora bene implementate).

Input dei dati

I dati possono essere immessi e modificati tramite l'interfaccia interattiva: occorre cliccare sulla griglia, alla posizione desiderata e modificare le caselle della pop-up window che appare. (È in sviluppo un modo di input direttamente da griglia, selezionabile dal set-up, ma non è ancora consigliabile). Notare che i dati immessi possono essere attivi o no: ciò è utile per esempio per fare grafici o fit parziali. I dati così prodotti sono salvabili su file.
I dati possono essere scritti in file leggibili da SnagLab. Attualmente esistono tre formati diversi:

- **UD**, per dati standard con incertezze individuali, così composto:
  #UD
  <stringa di didascalia>
  <numero di dati>
  <x1> <dx1> <y1> <dy1> <act1>
  <x2> <dx2> <y2> <dy2> <act2>
  …….

  dove xn, dxn, yn e dyn sono ascissa, sua incertezza (assoluta), ordinata e sua incertezza, per ogni punto; act è una flag di attivazione che vale 1 o 0.

- **MD**, per dati multipli, su più colonne, una per un'ordinata diversa, così composto:
  #MD
  <numero ordinate (n)> <numero di dati>
  <incertezza ascissa> <incertezza ordinata>
  <stringa di didascalia ordinata (colonna) 1>
  <stringa di didascalia ordinata 2>
  ....
  <stringa di didascalia ordinata n>
  <x1> <y11> <y12> … <y1n>
  <x2> <y21> <y22> … <y2n>
  …………..

- **SD**, così composto:
  #SD
  <stringa di didascalia>
  <numero di dati> <tempo iniziale> <tempo di campionamento>
  <y1> <y2> …

  I dati possono continuare su più righe, come si preferisce.

I dati nei file possono essere letti con la Open del menu file della finestra "Standard Data Input" o cliccando sull'icona open file della task bar. Se si apre un file con formato MD, viene chiesto se si vuole leggerlo lo stesso anche se non è UD, quale colonna si vuole leggere; se si risponde 0, le legge tutte e le mette in GD successivi, a partire da quello richiesto dall'utente (ATTENZIONE ! la prima colonna va anche nel GD 0).

Altri formati, in lettura e scrittura, saranno supportati.

Grafico

Si può graficare il GD "a fuoco". Quindi ogni grafico ha un GD "padrone". Possono tuttavia essere visualizzati sullo stesso grafico altri GD, tramite il menu "New input". Dell'ultimo GD immesso nel grafico può farsi il fit (in vari modi).
Può essere creato un nuovo grafico (con l'ultimo GD immesso), con nuove scelte di range e di tipo per le coordinate; il tipo delle coordinate è normale, logaritmico, quadrato, radice quadrata, inverso, per entrambi gli assi. Il fit è visualizzabile correttamente solo per coordinate normali o logaritmiche.

Fit

Sono attivabili vari tipi di fit per i dati presenti. In particolare:

- fit lineari, generici o con un punto fisso o con fissata pendenza
- fit polinomiali (fino al sesto grado, ma si può aumentare il limite col set-up)
- fit di funzioni di trasferimento (passa basso, passa alto e passa banda), fino al sesto ordine..

Dai fit lineari e polinomiali si puo' fare, attivando le flag di conversione logaritmica, fit di potenza, esponenziali e logaritmici. Nel caso del fit esponenziale si calcola anche il tau, nel caso del fit di potenza si calcola anche l'esponente.
È visualizzabile la zona di piano che comprende il range di variazione dei parametri (senza l'imposizione della dovuta correlazione tra i coefficienti stimati).
Per quanto riguarda i fit di funzioni di trasferimento, si noti che il passa alto e il passa basso, a partire dal secondo ordine, anche le risonanze. Per il primo e il secondo ordine vengono calcolate frequenze di taglio, frequenze di risonanza, tau e Q.

Analisi statistiche

Sono attivabili semplici analisi statistiche del singolo GD o il coefficiente di correlazione (ed eventualmente lo scatter-plot, cioè un GD con ascissa l'ordinata del primo GD e come ordinata quella del secondo) di due GD.
È possibile fare il test del chi-quadro tra due GD o tra un GD e il fit calcolato.

Analisi dei segnali

Le operazioni di analisi dei segnali sono orientate ai GD di tipo *sampled data*. Sono previsti:

- il calcolo dello spettro di potenza
- il calcolo dell'autocorrelazione (attivabile o dalla finestra dello spettro di potenza o come caso particolare della correlazione incrociata
- il calcolo della correlazione incrociata (cross-correlation) tra due GD

- applicazione di vari filtri digitali, in modo causale, anti-causale o bifronte

Calcoli (menu “Computations”)

Può calcolarsi l’integrale definito (in un intervallo di indici o di ascissa) di un GD.
Per i GD che rappresentano istogrammi o densità di probabilità, si possono calcolare media, deviazione standard, integrale totale, asimmetria e curtosi.

Varie operazioni sui GD

Ai GD possono essere applicate varie procedure. A parte la derivata e l’integrale (eseguito con semplice sommatoria), ci sono:

- operazioni sugli assi x e/o y (quadrato, radice quadrata, logaritmo decimale, logaritmo naturale, inverso,...)
- operazioni lineari su due GD (a*GD1+b*GD2+c) [se si vuole, si può ignorare il secondo, con b=0, ma non il primo]
- operazioni non-lineari su due GD (prodotto, divisione, minimo, massimo)
- operazioni su GD complessi (il supporto ai GD complessi e`, per ora, limitato)
- integrali, derivate, convoluzioni, FFT (che può produrre un GD complesso)
- selezioni, basate sull’ampiezza, sul valore dell’ascissa e/o sul valore dell’indice dello stesso GD o di un altro
- operazioni di insieme (cancellamento, rotazione e “inversione” per un singolo GD, concatenazione di due GD.

Segnali teorici, simulati e distribuzioni

Possono crearsi GD contenenti decine di tipi di segnali teorici, simulati o distribuzioni di probabilità.

Esercizi

Gli esercizi sono raccolti in vari capitoli, in file rtf. Possono essere letti con un normale word processor, come Word, WordPad e simili, o anche visualizzati nella finestra di testo della finestra principale.

Programmi esterni

E` possibile aggiungere programmi esterni che creano o modificano GD, oppure fanno calcoli su GD. Il modello è client-server, per cui SnagLab agisce da client rispetto a dll esterne che fungono da server di procedure.
Il nome delle dll esterne ammissibili è

csnagdll.dll	per il C/C++
fsnagdll.dll	per il Fortran
bsnagdll.dll	per il Visual Basic

Tali file devono essere nel folder del programma SnagLab.
Ciascuna dll può fornire fino a 50 programmi.
Viene fornita un progetto “template” in Visual C++ per la costruzione della csnagdll.dll .
Il colloquio client-server funziona così:

- il client chiede quali sono le procedure disponibili
- il server gli manda la lista che il client visualizza
- il client sceglie quale procedura vuole e su quali GD deve operare

- il server manda le liste dei parametri reali e interi necessari, fornendo dei valori default
- il client visualizza la lista dei parametri ("di input") e l'utente (il client) digita i valori (se sono diversi dai default)
- il server fornisce l'eventuale GD di uscita e gli eventuali parametri di output (visualizzati dal client).

Per ora, solo GD di tipo 3 sono gestibili.
Le routine basilari (che devono essere modificate dall'utente) sono

getcepl
getextprneeds
cextpr3

oltre a crea_prog_list, tutte contenute in csnagdll.cpp .
Il progetto e` contenuto in uno zip file. Occorre scompattarlo, girarlo in Visual C++ e fare le modifiche.

Altre dll saranno fornite per accedere a dati e procedure esterne (per esempio snagframedll.dll e snagr87.dll per accedere ai dati di antenne gravitazionali)

Tabelle

Distribuzione cumulativa normale standardizzata

z	centesimi z									
	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.500000	0.503989	0.507978	0.511967	0.515953	0.519939	0.523922	0.527903	0.531881	0.535856
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555670	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345
0.2	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092
0.3	0.617911	0.621719	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
0.4	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933
0.5	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705402	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405
0.6	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903
0.7	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236
0.8	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802338	0.805106	0.807850	0.810570	0.813267
0.9	0.815940	0.818589	0.821214	0.823814	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913
1	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143
1.1	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.878999	0.881000	0.882977
1.2	0.884930	0.886860	0.888767	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.3	0.903199	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914656	0.916207	0.917736
1.4	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888
1.5	0.933193	0.934478	0.935744	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083
1.6	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486
1.7	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959071	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273
1.8	0.964070	0.964852	0.965621	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621
1.9	0.971284	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705
2	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691
2.1	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738
2.2	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989
2.3	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576
2.4	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613
2.5	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201
2.6	0.995339	0.995473	0.995603	0.995731	0.995855	0.995975	0.996093	0.996207	0.996319	0.996427
2.7	0.996533	0.996636	0.996736	0.996833	0.996928	0.997020	0.997110	0.997197	0.997282	0.997365
2.8	0.997445	0.997523	0.997599	0.997673	0.997744	0.997814	0.997882	0.997948	0.998012	0.998074
2.9	0.998134	0.998193	0.998250	0.998305	0.998359	0.998411	0.998462	0.998511	0.998559	0.998605
3	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999
3.1	0.999032	0.999064	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289
3.2	0.999313	0.999336	0.999359	0.999381	0.999402	0.999423	0.999443	0.999462	0.999481	0.999499
3.3	0.999517	0.999533	0.999550	0.999566	0.999581	0.999596	0.999610	0.999624	0.999638	0.999650
3.4	0.999663	0.999675	0.999687	0.999698	0.999709	0.999720	0.999730	0.999740	0.999749	0.999758
3.5	0.999767	0.999776	0.999784	0.999792	0.999800	0.999807	0.999815	0.999821	0.999828	0.999835
3.6	0.999841	0.999847	0.999853	0.999858	0.999864	0.999869	0.999874	0.999879	0.999883	0.999888
3.7	0.999892	0.999896	0.999900	0.999904	0.999908	0.999912	0.999915	0.999918	0.999922	0.999925
3.8	0.999928	0.999930	0.999933	0.999936	0.999938	0.999941	0.999943	0.999946	0.999948	0.999950
3.9	0.999952	0.999954	0.999956	0.999958	0.999959	0.999961	0.999963	0.999964	0.999966	0.999967
4	0.999968	0.999970	0.999971	0.999972	0.999973	0.999974	0.999975	0.999976	0.999977	0.999978
4.1	0.999979	0.999980	0.999981	0.999982	0.999983	0.999983	0.999984	0.999985	0.999985	0.999986

Valori del χ^2 per un dato livello di fiducia

Livello di fiducia	0.9	0.95	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.9999
Gradi di libertà							
1	2.706	3.841	6.635	7.879	10.827	12.115	15.134
2	4.605	5.991	9.210	10.597	13.815	15.201	18.425
3	6.251	7.815	11.345	12.838	16.266	17.731	21.104
4	7.779	9.488	13.277	14.860	18.466	19.998	23.506
5	9.236	11.070	15.086	16.750	20.515	22.106	25.751
6	10.645	12.592	16.812	18.548	22.457	24.102	27.853
7	12.017	14.067	18.475	20.278	24.321	26.018	29.881
8	13.362	15.507	20.090	21.955	26.124	27.867	31.827
9	14.684	16.919	21.666	23.589	27.877	29.667	33.725
10	15.987	18.307	23.209	25.188	29.588	31.419	35.557
11	17.275	19.675	24.725	26.757	31.264	33.138	37.365
12	18.549	21.026	26.217	28.300	32.909	34.821	39.131
13	19.812	22.362	27.688	29.819	34.527	36.477	40.873
14	21.064	23.685	29.141	31.319	36.124	38.109	42.575
15	22.307	24.996	30.578	32.801	37.698	39.717	44.260
16	23.542	26.296	32.000	34.267	39.252	41.308	45.926
17	24.769	27.587	33.409	35.718	40.791	42.881	47.559
18	25.989	28.869	34.805	37.156	42.312	44.434	49.185
19	27.204	30.144	36.191	38.582	43.819	45.974	50.787
20	28.412	31.410	37.566	39.997	45.314	47.498	52.383
21	29.615	32.671	38.932	41.401	46.796	49.010	53.960
22	30.813	33.924	40.289	42.796	48.268	50.510	55.524
23	32.007	35.172	41.638	44.181	49.728	51.999	57.067
24	33.196	36.415	42.980	45.558	51.179	53.478	58.607
25	34.382	37.652	44.314	46.928	52.619	54.948	60.136
26	35.563	38.885	45.642	48.290	54.051	56.407	61.667
27	36.741	40.113	46.963	49.645	55.475	57.856	63.166
28	37.916	41.337	48.278	50.994	56.892	59.299	64.656
29	39.087	42.557	49.588	52.335	58.301	60.734	66.152
30	40.256	43.773	50.892	53.672	59.702	62.160	67.623
31	41.422	44.985	52.191	55.002	61.098	63.581	69.097
32	42.585	46.194	53.486	56.328	62.487	64.993	70.564
33	43.745	47.400	54.775	57.648	63.869	66.401	72.029
34	44.903	48.602	56.061	58.964	65.247	67.804	73.475
35	46.059	49.802	57.342	60.275	66.619	69.197	74.925
36	47.212	50.998	58.619	61.581	67.985	70.588	76.372
37	48.363	52.192	59.893	62.883	69.348	71.971	77.800
38	49.513	53.384	61.162	64.181	70.704	73.350	79.218
39	50.660	54.572	62.428	65.475	72.055	74.724	80.637
40	51.805	55.758	63.691	66.766	73.403	76.096	82.055
41	52.949	56.942	64.950	68.053	74.744	77.458	83.475
42	54.090	58.124	66.206	69.336	76.084	78.818	84.874
43	55.230	59.304	67.459	70.616	77.418	80.174	86.272
44	56.369	60.481	68.710	71.892	78.749	81.527	87.672
45	57.505	61.656	69.957	73.166	80.078	82.873	89.070

Indice