Sul metodo diagonale di Cantor

s.f.

Il metodo è il seguente:

- si prendono tutti i numeri tra 0 e 1: se sono numerabili, li mettiamo uno sotto l'altro in una tabella.
- si costruisce quindi un numero che ha la prima cifra diversa dal primo, la seconda dal secondo, e così via: questo numero non è nella tabella, quindi l'assunto che i numeri tra 0 e 1 siano numerabili è assurdo.

Prima critica: si suppone che si possa costruire un numero di infinite cifre. Ora una cosa del genere è "banale" per casi "banali": per esempio infiniti 0, numeri periodici e così via, ma non quando l'"informazione" diverge.

Seguono due sdimostrazioni, una che evidenzia che il metodo diagonale non dimostra l'assurdità dell'ipotesi e un'altra che ordina i numeri in un modo particolare, e uno "svelamento".

Sdimostrazione 1 (supponendo che si possano costruire numeri con infinite cifre):

- i numeri tra 0 e 1 li indichiamo in codice binario. Applicando il metodo diagonale, si trova un solo numero. Si prende questo numero e lo si mette come primo nella tabella e gli altri li si fanno scorrere: abbiamo un nuovo set di numeri che è numerabile, quindi i numeri scritti in binario possono essere numerati.

- rappresentiamo ora i numeri in codice a base 3. Nel metodo diagonale per ogni cifra ci sono due possibilità, quindi si può costruire un insieme di numeri "alternativi" isomorfo ai numeri scritti in binario che abbiamo visto essere numerabile. Ci sono quindi due serie di numeri numerabili e quindi è ovvio che l'insieme dei due sia numerabile.

- rappresentiamo ora i numeri in codice a base 4. L'argomento precedente si può estendere banalmente. Nel metodo diagonale per ogni cifra ci sono tre possibilità, quindi si può costruire un insieme di numeri "alternativi" isomorfo ai numeri scritti in ternario che abbiamo visto essere numerabile. E quindi ciò vale per tutte le basi, quindi il metodo diagonale non produce assurdi.

Sdimostrazione 2 (supponendo che si possano costruire numeri con infinite cifre):

Come possiamo mettere in ordine i numeri ? Semplice: per esempio, in base 10, prendiamo prima lo 0, poi i numeri da 1 cifra: 0.1 0.2 0.3 … 0.9, poi quelli da 2 cifre 0.01 0.02 … 0.99, poi quelli da 3 cifre, e così via.
In altre parole, per esempio, il numero $0.a_1a_2a_3$ ha il posto $a_3a_2a_1+1$ (il numero 0.346 ha la posizione 644).

È ovvio che così copro tutti i numeri.

Svelamento

E ora che abbiamo un modo per ordinare i numeri, applichiamo il metodo diagonale al caso binario e vediamo quale è il misterioso numero “che non c’è”.
La tabella è (solo i numeri dopo la virgola)

0 0 0 0 0 0 0 0
1 **0** 0 0 0 0 0 0
0 1 **0** 0 0 0 0 0
1 1 0 **0** 0 0 0 0
0 0 1 0 **0** 0 0 0
1 0 1 0 0 **0** 0 0
0 1 1 0 0 0 **0** 0
1 1 1 0 0 0 0 **0**
……….

e il numero “mancante” è 0.11111… che equivale a 1, che non ha nulla di misterioso: nel nostro ordinamento, se la tabella fosse finita, sarebbe l’ultimo numero della tabella.
Si noti che se cambiassimo l’ordinamento, scambiando per esempio le prime due righe della tabella, il numero mancante sarebbe 0.011111… equivalente a 0.1, che non manca affatto dalla tabella, anzi ne è il primo elemento, oltre ad esserne, se la tabella fosse finita, il penultimo.
In effetti posso facilmente far “sparire” qualsiasi numero della lista.